(Dreiundvierzigster, der dritten Folge fünfter)

Bericht

über die

zur ersten Ordnung gehörende

Real-Schule zu St. Johann

zu

Danzig,

womit zu der

Freitag, den 18. März 1864, Vor- und Nachmittags,

zu haltenden

öffentlichen Prüfung

der Schüler dieser Unterrichts-Anstalt

ergebenst einladet

der

Direktor Dr. Löschin.

Inhalt:

Danzig.
Wedel'sche Hofbuchdruckerei.
1864.

I. Veränderungen im Lehrpersonale und in der Klassenabtheilung.

Von den beiden — zur Verstärkung der Lehrkräfte der Anstalt und zu der, bei dem Beginne des (16. April 1863) Lehrkursus vorzunehmenden, Theilung der Sexta in zwei Parallelcötus (s. das vorjährige Programm) — neukreirten beiden Hülfslehrerstellen war zu der genannten Zeit nur die eine, und zwar durch den (am ersten Schultage von dem Direktor eingeführten) Herrn Mehler, besetzt. Für die zweite hatte sich der annehmbare Bewerber noch nicht gefunden, und es mußte daher eine interimistische Verwaltung derselben eintreten, die dem größten Theile nach von dem Herrn Prediger Weiß (an der St. Katharinen-Kirche), der vor Uebernahme seines jetzigen Amtes 7 Jahre lang als Hülfslehrer an der St. Johannis-Schule mit gutem Erfolge gewirkt hatte, und von den, der Schule bereits angehörenden Lehrern Dr. Brandt, Schultze und Hardt übernommen wurde. Erst nahe am Schlusse des Lehrjahres fand sich in der Person des jüngeren Herrn Dr. Kreyenberg ein Bewerber, dessen vorzügliche Qualifikation zur Ertheilung des Unterrichts im Französischen einen schätzbaren Gewinn für die Anstalt erwarten ließ, und der durch die vorläufige Uebernahme einiger, diesem Unterrichte zugewiesenen, Stunden in einem Cötus der Quarta und einem der Quinta Gelegenheit fand, diese Erwartungen genügend zu rechtfertigen. Die für einen der bisherigen Hülfslehrer der Anstalt neukreirte vierte ordentliche Lehrerstelle wurde, auf den Antrag des Direktors, Herrn Dr. Brandt übertragen. — Herzlichen und freudigen Antheil nahmen Lehrer und Schüler an der, im September 1863 erfolgten, Ernennung des Herrn Oberlehrer Gronau zum Professor, wodurch das Königl. Hohe Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten die Verdienste des Lehrers und Gelehrten um Schule und Wissenschaft in ehrender Weise anerkannte.

II. Gegenstände des im verflossenen Lehrjahre ertheilten Unterrichtes.

Vorschule.

Zweite Klasse. Ordinarius: Herr Hugen.

Religion, 2 St. w. Herr Hugen. Erzählungen aus der biblischen Geschichte des A. Testamentes. Die Schüler lernten wöchentlich 2 Bibelsprüche, monatlich ein kurzes Kirchenlied und in den fünfmaligen Ferien des Jahres das erste Hauptstück des Lutherischen Katechismus aus den Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannis-Schule.

Lesen, 6 St. w. Herr Hugen. Erste Abtheilung: Leseübungen im Klein-Kinderfreunde von Dr. Löschin und Wiedererzählen des Gelesenen.

Deutsch und **Orthographie**, 4 St. w. Herr Hugen. Kopiren aus dem Lesebuche, Diktirübungen, Kennenlernen des Haupt-, Eigenschafts- und Zeitwortes, so wie der Beugung derselben, Memoriren kleiner Gedichte und Liederverse und Besprechungen darüber, so wie über die gelernten Bibelsprüche und Kirchenlieder.

Rechnen, 6 St. w. Herr Hugen. Numeriren. Die vier Species in unbenannten Zahlen. Kopfrechnen.

Schreiben, 6 St. w. Herr Hugen. Uebungen nach Vorschriften von der Hand des Lehrers in deutscher und lateinischer Schrift mit Anwendung der Carstair'schen Methode.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Uebungen zur Bildung des Gehörs und der Stimme. Leichte Lieder und Choräle wurden nach dem Gehör eingeübt. Der Text dazu wurde durch Vorsprechen auswendig gelernt.

Erste Klasse. Ordinarius: Herr Reinke.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. Erzählungen aus der biblischen Geschichte des Neuen Testaments. Lernlektionen s. Erste Vorschulklasse.

Katholischer Religionsunterricht, Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Vierte Klasse A.

Deutsch, 8 St. w. a) Sprachunterricht, 2 St. w. Herr Reinke. Die Lehre von den Begriffswörtern, deren Flexion; der Gebrauch des Kasus durch mündliche und schriftliche Beispiele erläutert. Uebungen in der Orthographie und im mündlichen Vortrage. — b) Leseübungen, 6 St. w. Herr Reinke, einzeln und im Chore. Das Gelesene wurde erklärt und von den Schülern wiedererzählt. Benutzt wurde der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin.

Latein, 1 St. w. Herr Reinke. Leseübungen, Abschreiben und Auswendiglernen einiger Vokabeln und Hermanns Lesebuche.

Rechnen, 6 St. w. Herr Reinke. Die vier Species in unbenannten Zahlen gründlich wiederholt, in benannten Zahlen die Resolution, Reduktion, Addition, Subtraktion und Zeitrechnung im Kopfe und schriftlich eingeübt.

Geographie, 2 St. w. Herr Hugen. Die Vorbegriffe zur Geographie aus dem ersten und zweiten Kursus von Voigts Leitfaden wurden durchgenommen und die Länder der östlichen Halbkugel mit besonderer Berücksichtigung Europas an der Karte eingeübt.

Schreiben, 6 St. w. Herr Reinke. Uebungen nach Vorschriften an der Wandtafel von der Hand des Lehrers. Täglich häusliche Uebungen.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Reinke. Freies Handzeichnen nach Bühlers „Hundert Vorlegeblättern."

Singen, 1 St. w. Herr Reinke. Fortgesetzte Uebungen zur Bildung des Gehörs. Einstimmige Lieder nach dem Gehör gelernt, wobei Erks und Graefs Liederkranz, Sostmanns Singweisen und die Melodien von Hästers und Dreisels Lesebüchern benutzt wurden. Der Text wurde meistens auswendig gelernt. Choräle nach Dr. Kniewel.

Realklassen.

Sechste Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Real-Schullehrer Schultze.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pred.-Amts-Kand. Hardt. Die biblische Geschichte des A. T. nach Gossel. Beispiele aus der Profangeschichte, Sprüche, Lieder, das erste und zweite Hauptstück gelernt, nach den Lernaufgaben für die St. Johannisschule.

Katholischer Religionsunterricht, Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Vierte Klasse A.

Deutsch, 4 St. w. Herr Realschullehrer Schmidt. Die Theile des einfachen Satzes; das Verbum und die Präpositionen; Uebungen im Lesen; Deklamiren; orthographische Uebungen und schriftliche Arbeiten.

Latein, 8 St. w. Herr Realschullehrer Schmidt. Die 5 Deklinationen, das Verbum Sum, die regelmäßigen Conjugationen. Zahlwörter, Pronomina; Uebersetzung der betreffenden lateinischen und deutschen Stücke in Bleske. S. 1—153. Wöchentlich 2 Exercitien und 1 Extemporale.

Rechnen, 5 St. w. Herr Schultze. Wiederholung der vier Species in unbenannten Zahlen. Die vier Species in benannten Zahlen. Zeitrechnung. Vorbereitung zum Bruchrechnen. Addition der Brüche.

Geographie, 2 St. w. Herr Schultze. Der erste Cursus von Voigts Leitfaden wurde eingeübt. Heimathskunde. Anleitung zum Kartenzeichnen.

Geschichte, 1 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Sagen aus der griechischen, römischen und deutschen Geschichte.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Im Sommer Pflanzen, im Winter Uebersicht des Thierreichs.

Schreiben, 3 St. w. Herr Krahn. Deutsche und lateinische Schrift. Taktschreiben.

Singen, 1 St. w. Herr Reinke. Kenntniß der Noten; Bildung der Tonleiter; Treffübungen nach Böhnickes Chorgesang-Schule. Im Uebrigen wie in der ersten Vorschulklasse.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Schultze. Freies Handzeichnen.

Sechste Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Real-Schullehrer Schmidt.

Mit Sexta A. bei getrennter Unterrichtsertheilung dieselben Lehrer und dieselben Lehrgegenstände.

Fünfte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr P.-A.-Kand. Hardt.

Evangelischer Religionsunterricht, 3 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Wunder und Gleichnisse Jesu Christi. Bibelkunde. Bibellesen. Sprüche, Lieder, die 3 ersten Hauptstücke, Lernaufgaben u. s. w.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Vierte Klasse.

Deutsch, 4 St. w. Herr R.-Sch.-L. Mehler. Der einfache und der zusammengesetzte Satz. Lesen. Erklärung von Gedichten. Declamiren. Aufsätze.

Latein, 6 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Die Formenlehre nach dem Elementarbuch von Bleske. Uebersetzung der Uebungsstücke, die deutschen als wöchentliche Exercitien.

Französisch, 5 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Plötz I. Kursus bis zu den Conjugationen. Wöchentlich ein Exercitium und Extemporale.

Rechnen, 4 St. w. Herr Mehler. Die Bruchrechnung, einfache Regel de tri und Zinsrechnung. Kopfrechnen.

Geographie, 2 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Voigt Kursus I. und II., Allgemeines über Deutschland und Preußen. Versuche im Kartenzeichnen.

Geschichte, 1 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Gruppenbilder und Biographien aus der alten Geschichte.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Im Sommer Botanik. Linnéisches System. Im Winter Mineralogie. Modelle der einfachsten Krystalle von den Schülern angefertigt.

Schreiben, 3 St. w. Herr Krahn. Deutsche und lateinische Schrift. Schönschreiben.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Gradlinige Aufrisse von Gegenständen, einfache Ornamente.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Die weniger begabten Schüler beider Cötus der V. und VI. Klasse waren zu einer Singabtheilung kombinirt. Melodik, Rhythmik, Dynamik wurden erklärt und geübt, die bekannten Dur- und Molltonarten gelernt. Einübung ein- und zweistimmiger Lieder nach Erks Liederkranz I. Theil. Choräle nach Dr. Kniewel.

Fünfte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Pred. Weiß.

Evangelischer Religionsunterricht, 3 St w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Wie Cötus A.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Vierte Klasse A.

Deutsch, 4 St. w. Herr Prediger Weiß. Der einfache und zusammengesetzte Satz. Analysiren. Lesen. Orthographische und stylistische Uebungen.

Latein, 6 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Wiederholung und Erweiterung des Pensum von Sexta. Ableitung der Conjugationsformen. Verba anomala. Lectüre aus Bleske 2. Cursus mit sorgfältiger Uebung im Analysiren und Construiren. Memoriren von Vokabeln und einigen Fabeln.

Französisch, 5 St. w. Herr Pred. Weiß. S. Cötus A.

Rechnen, 4 St. w. Herr R.-Sch.-L. Mehler. Wie Cötus A.

Geschichte, 1 St. w. Herr Hardt. Wie in Cötus A.

Geographie, 2 St. w. Herr Hardt. Wie Cötus A.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Wie in Cötus A.

Schreiben, 3 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. S. Cötus A.

Vierte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Oberlehrer Küster.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Erläuterung des 2ten, 4ten und 5ten Hauptstückes im Luth. Katech. Uebungen im Nachschlagen der Bibel, Bibelsprüche und Kirchenlieder wurden aus den „Lernaufgaben u. s. w." memorirt.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. kombinirt mit Vorschulkl. I., VI., V. A. u. B. und IV. A. und B. Herr Pfarrer Dr. Redner. a. Biblische Geschichte des Alten Testaments, nach dem Handbuche von Mathias. — b. Die Glaubens- und Sittenlehre nach dem Diöcesan-Katechismus.

Deutsch, 3 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Die Lehre von den Satztheilen, von der Eintheilung der Sätze und deren Verbindung, von der Interpunktion; Stylübungen; — Memoriren von Gedichten und Uebung im freien Sprechen.

Latein, 6 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Davon 3 St. Grammatik. Repetition des Pensums der vorigen Klasse und Erweiterung desselben. Exercitia und Extemporalia zur Einübung der wichtigsten syntactischen Regeln. Lectüre 3 St. Aus Corn. Nepos: Datames, Epam., Pelop., und Agamemnon. Im W. 1 St. Phädrus Fabeln. (Ausgabe von Raschig.)

Französisch, 5 St. w. Herr Pred. Weiß. In 3 St. wurden aus Plötz's Elementarbuche Kursus I., Lekt. 41—80 durchgenommen, die beigefügten Abschnitte der Grammatik erlernt und die deutschen Uebungsstücke zu Exercitien benutzt. 2 St. Lectüre der leichteren Stücke aus Mager. Extempor., Vocabeln bis No. 50 aus dem petit voc.

Mathematik, 6 St. w.

a) Praktisches Rechnen 2 St. w. Herr R.-Sch.-L. Mehler. Zusammenges. Regel de tri, Zins-, Rabatt-, Ketten- und Gesellschaftsrechnung.

b) Arithmetik 2 St. w. Herr R.-Sch.-L. Mehler. Dezimalbrüche, Proportionen, entgegengesetzte Größen und Anfänge der Buchstabenrechnung.

c) Geometrie 2 St. w. Herr R.-Sch.-L. Mehler. Durchnahme der Sätze über die Winkel, Parallellinien, Kongruenz der Dreiecke, Vierecke nebst Aufgaben nach „Mehlers Hauptsätze der Elementar-Mathematik" § 1—47. Einfache geometr. Aufgaben.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Aus Voigts drittem Kursus der allgemeine Theil und Europa. Repetition des 2. Kursus.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberl. Küster. Alte Geschichte nach den Tabellen I—III. von Hirsch.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Dr. Bail. Das künstliche System erläutert an lebenden Pflanzen. Allgemeiner Ueberblick über das Thierreich. Eingehende Betrachtung der Säugethiere.

Schreiben, 2 St. w. Herr Krahn. Deutsche und lateinische Schrift. Schnellschreiben.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Ornamente und Gefäße.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. S. Fünfte Klasse Cötus A.

Vierte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Dr. Brandt.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Mit Cötus B. kombinirt.

Katholischer Religionsunterricht, 2. St. w. Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Cötus A.

Deutsch, 3. St. w. Herr Dr. Brandt. Wie Cötus A.

Latein, 6 St. w. Herr Dr. Brandt. Lectüre 2 St. Nepos: Alcibiades. Phädrus Fabeln. Grammatik 2 St. Gründliche Repetition des Quinta-Pensums. Nach Siberti-Meiring der Accus. c. Inf., der Ablat. absol. die wichtigsten Conjunctionen. Cap. 87—90. Schriftliche Analyse der Beispiele. 2 St. Exercitien und Extemporalien, Correctur und theilweise Memoriren derselben.

Französisch, 5 St. w. Herr Dr. Brandt. Plötz Kursus I. Lekt. 56. bis zu Ende. Die regelmäßigen und einige unregelmäßigen Verben geübt. Wöchentlich ein Exercitium und Extemporale, leichtere lateinische Sätze ins Französische übersetzt. Versuche zu Sprechübungen.

Mathematik, 6 St. w. Herr R.-Sch.-L. Mehler. Wie Cötus A.

Geographie, 2 St. w. Herr Dr. Brandt. Wie Cötus A.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Wie in Cötus A.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Dr. Bail. Wie in Cötus A.

Schreiben, 2. St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Singen, 2. St. w. Herr Reinke. S. Fünfte Klasse Cötus A.

Dritte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Oberlehrer Stobbe.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Die christliche Sittenlehre und zwar mit Rücksicht auf den Katechismus und auf die biblische Geschichte. Memorirt wurden einige Kirchenlieder und wiederholt die aus den „Lernaufgaben" memorirten Sprüche.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Erste Klasse.

Deutsch, 3 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Gedichte Schiller's, Göthe's, Uhland's u. A. wurden memorirt, vorher dem Inhalte und der Form nach genau besprochen. — Anfangsgründe der Metrik. — Aufsätze, alle 4 Wochen einer, korrigirt und besprochen. Daran knüpfte sich die Grammatik. Vorträge. Disponiren der Themata.

Latein, 5 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. 1. Lektüre (2 St.) Aus dem Cornelius Nepos: Timoleon, Hamilcar, Hannibal. — Caesar de bello Gall. IV., 20 bis V., 6. mit schriftlicher Uebersetzung. Phädrus (Ausgabe von Raschig) Fab. 51—60., wovon einige gelernt wurden. — 2. Grammatik (2 St.) Siberti-Meiring Kap. 82—90. (Kasuslehre) ausführlich. Das Wichtigste aus Kap. 97—104. Exercitien und Extemporalien. Mündliche Uebersetzung aus Meirings „Uebungen zur lat. Grammatik für mittlere Klassen.

Französisch, 4 St. w. Herr Dr. Brandt. 1. Lektüre (2 St.) Aus Magers Lesebuch I. Kursus prosaische und poetische Stücke, von denen Mehreres gelernt wurde. Kleine Komödien. — 2. Grammatik (2 St.) Orthographische Uebungen, Extemporalien und Exercitien zur Anwendung der unregelmäßigen Verben, nach Plötz II. Kursus, Lect. 1—35. Retroversion passender Sätze aus dem Lateinischen in's Französische. Gallicismen nach Plötz. Versuche zu Sprechübungen.

Englisch, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. An, der englischen Geschichte entnommenen, Lesestücken werden die Regeln der Aussprache und der Rechtschreibung, sowie die Grammatik behandelt und damit Uebungen im Hören, Sprechen und Uebersetzen verknüpft. Wochenweise vorgesprochene leichtere Sätze wurden auswendig gelernt, eine kleine Komödie recitirt. Die ins Deutsche aufgenommenen Fremdwörter wurden erklärt.

Mathematik, 6 St. w.

a) Praktisches Rechnen 2 St. Herr Professor Gronau. Regula multiplex, Kettenregel, Zins-, Diskonto-, Prozent- und Alligationsrechnungen wurden nebst andern Aufgaben durchgenommen.

b) Arithmetik 2 St. Derselbe. Dezimalbrüche, entgegengesetzte Größen, Einschließungszeichen, Buchstabenrechnung, Proportionslehre, Potenzen, Quadratwurzeln, Gleichungen des ersten Grades und arithmetische Progressionen bildeten den Gegenstand des Unterrichts.

c) Geometrie 2 St. Herr Dr. Bail. Nach Mehlers Lehrbuche wurde die Planimetrie behandelt mit Rücksicht auf Congruenz, Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren.

Geographie, 2. St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Voigt's Leitfaden Kursus IV. Europa wurde gelernt, die betreffenden Abschnitte aus Kursus III. wurden wiederholt. Uebungen im Kartenzeichnen nach Vorbildern zu Hause, aus dem Gedächtnisse in der Klasse.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Brandenburgisch-Preußische Geschichte. Erlernung von Geschichtstabellen.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Dr. Bail. Im Sommer Familien des natürlichen Pflanzensystems. Im Winter Mineralogie, namentlich Krystallographie, erläutert an Exemplaren.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Freies Handzeichnen: Konturen und ausnahmsweise auch schattirt ausgeführte Zeichnungen. Linearzeichnen. Planimetrische Aufgaben. Elemente der Perspektive.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Kombinirt mit V. A. B., theils auch mit I., II., III, A.

Dritte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Professor Gronau.

Evangelischer Religionsunterricht, 2. St. w. der Direktor. Kombinirt mit Cötus A.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Erste Klasse.

Deutsch, 3 St. w. Herr Oberlehrer Küster. In 1 St. wurde den Schülern ein kurzer Abriß der Metrik gegeben, ausgewählte Gedichte Schiller's nach Inhalt und Versmaß erläutert, memorirt und deklamirt. 1 St. wurde zu Stylübungen (die gelieferten Aufsätze nach vorangegangener häusl. Correctur besprochen), 1 St. zur Uebung im freien Vortrage verwandt.

Latein, 5 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Wie in Cötus A.

Französisch, 4 St. w. Herr Dr. Brandt. Wie in Cötus A.

Englisch, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. Wie in Cötus A.

Mathematik, 6 S. w. Herr Prof. Gronau.
a) Praktisches Rechnen
b) Arithmetik } wie in Cötus A.
c) Geometrie 2 St.
Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Wie in Cötus A.
Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Wie in Cötus A.
Naturgeschichte, 2 St. w. Wie in Cötus A.
Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.
Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Kombinirt mit V. A. u. B., theils auch mit I., II., III. A.

Zweite Klasse. Ordinarius: Herr Oberlehrer Dr. Panten.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Systematisch zusammenhängender Vortrag der christlichen Sittenlehre. Das Evangelium des Johannes wurde theilweise gelesen und erläutert. Das Memorirte wurde gelegentlich wiederholt.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Dr. Redner. S. Erste Klasse.

Deutsch, 4. St. w. Oberlehrer Dr. Panten. Dispositionen, Aufsätze. Lektüre ausgewählter Stücke der epischen Poesie, um an denselben den Begriff u. die Geschichte der epischen Poesie zu entwickeln. Freie Vorträge im Anschluß an die Lectüre Schillerscher Dramen.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. 1. Lektüre 3 St. Caesar bell. Gall. VII. VIII. Ovid. Metam. VIII., IX. mit Auswahl. 2. Grammatik 1 St. Exercitien und Extemporalien zur Einübung der Syntax nach Siberti-Meiring Kap. 91—104.

Französisch, 4. St. w. Herr Dr. Laubert. Grammatik von Plötz II. Kursus Seite 1—230 durchgenommen, Exercitien und Extemporalien damit verbunden. Artikel aus Zeitschriften vorgelesen. Uebungen im Vortrage. Aus Herrig's Lesebuch Stücke von Dumas, Michaud, Reboul, Mery, Lebrun, de Vigny, Janin übersetzt, französisch interpretirt und theilweise memorirt. Scenen aus Molière's avare recitirt.

Englisch, 3 St. w. Dr. Laubert. Zimmermann's Grammatik II. Kursus Seite 1—70 durchgenommen, Exercitien und Sprechübungen damit verbunden. Längere, wöchentlich vorgesprochene, das gewöhnliche Leben betreffende Sätze auswendig gelernt. Aus Scott's tales of a grandfather S. 1—90 übersetzt, englisch erklärt und theilweise memorirt. Erster Act von Macbeth nach Rollen recitirt.

Mathematik, 5 St. w. Herr Professor Gronau.
a) Arithmetik 3 St. Das Ausziehen der Kubikwurzeln, die Potenzenlehre für negative und gebrochene Exponenten, die Logarithmen, die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen, die quadratischen Gleichungen und die geometrischen Progressionen boten den Lehrstoff dar. Von praktischen Rechnungen sind besonders die logarithmisch behandelte Zins von Zins-Rechnung und die Amortisationsrechnung namhaft zu machen.
b) Geometrie 2 St. Beendigung der Planimetrie. Ebene Trigonometrie. Lösung geometrischer Aufgaben.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Amerika mit besonderer Rücksicht auf Entdeckung, Bevölkerung, Produkte und Verkehrsverhältnisse. Repetition von Europa nach Voigt Kursus III., IV. Zur Prüfung des Gelernten wurden von den Schülern in der Klasse Karten aus dem Gedächtnisse gezeichnet. Allgemeine physische Geographie.

Geschichte, 3 St. w. der Direktor. Die Geschichte der europäischen Staaten bis zur französischen Revolution mit wiederholenden Rückblicken auf die bereits durchgegangenen Gebiete der Geschichte, vornehmlich der des Vaterlandes. Erste Hälfte.

Naturwissenschaften, 6 St. w. Herr Dr. Bail.
a) Naturgeschichte 2 St. Anatomie und Physiologie der Pflanzen, Thiere und Menschen, erläutert durch Abbildungen und Präparate. Wiederholung der drei Naturreiche.
b) Chemie 2 St. Die Metalloide durch Experimente erläutert.
c) Physik 2 St. Magnetismus, Electricität, Galvanismus.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Freies Handzeichnen. Schattirt ausgeführte Zeichnungen mit Anwendung verschiedener Zeichenmaterialien. Einzelne Versuche im Zeichnen nach der Natur, in der Schnellmalerei und im Malen mit Wasserfarben. Linearzeichnen. Perspektivisches Zeichnen der von ebenen und gekrümmten Flächen begrenzten Körper. Geometrische Construction der in der Technik und Baukunst gebräuchlichen Kurven.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Die geübteren Schüler aus V. A. u. B., IV. A. u. B. und III. A. u. B. u. II. waren zu einer Singabtheilung vereinigt, in welcher der vierstimmige Chorgesang sorgfältig geübt wurde. Es wurden aus Bönicke's Chorgesangschule III. Kursus, aus dem zweiten Hefte von Erk's und Graef's Sängerhain vierstimmige Choräle und Lieder, so auch Hymnen eingeübt.

Erste Klasse. Ordinarius: Der Direktor.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Bei der Geschichte der Entstehung, Ausbildung und der Unterscheidungslehre der verschiedenen christlichen Kirchen und Sekten eine genauere Begründung des evangelischen Lehrbegriffes in Betreff dieser Unterschiede. Erste Hälfte; von der Gründung der christlichen Kirche bis zum Tode Luthers. Gelesen wurden die wichtigsten Kapitel aus den Paulinischen Briefen.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. mit II. und III. kombinirt. Herr Pfarrer Dr. Redner. a. Kirchengeschichte bis zum 12. Jahrhundert. b. Die Religionslehre nach dem großen Kathol. Katechismus von Deharbe.

Deutsch, 4 St. w. und zwar a. (2 St. w.) Herr Oberlehrer Dr. Panten. Dispositionen. Aufsätze. Freie Vorträge. Lektüre ausgewählter Dramen (Sophokles Antigone; Euripides und Göthes Iphigenie auf Tauris). b. (2 St.) Geschichte der deutschen Nationalliteratur. Erste Hälfte bis zur zweiten schlesischen Schule, der Direktor. Als Leitfaden wurde dabei der Grundriß der „Geschichte der deutschen Literatur von O. Lange" benutzt. Zur Uebersicht des Zusammenhanges und der Zeitfolge diente eine besondere Rubrik in den von dem Direktor entworfenen historischen Tabellen: „Chronologische Memoranda u. s. w." S. zweite Klasse.

Latein, 3 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Virgil. Aen. X. XI., Livius XXII., Horaz, 12 ausgewählte Oden.

Französisch, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. Repetition der Plötz'schen Grammatik kapitelweise in französischer Sprache. Extemporalien. Uebungen im Vortrag und Dialog. Die Kenntniß der Umgangssprache durch Vorlesen von Artikeln aus Tagesblättern gefördert. Aus Schillers Geschichte des 30jährigen Krieges Capitel übersetzt. In Herrig's Lesebuche Stücke von Boileau, Regnard, Lacretelle, Thiers, Mignet, Voltaire, Chenier französisch erklärt und theilweise ins Englische übertragen. Aufsätze: la vie privée de Louis XIV., Richard Coeur de lion, bataille de Leipsic, l'Ecosse en 1745 (nach dem Englischen) ꝛc.

Englisch, 3 St. w. Herr Dr. Laubert. Die Grammatik capitelweise wiederholt in englischer Sprache. Extemporalien. Wochenweise vorgesprochene dem Idiom angehörende Sätze auswendig gelernt. Vorträge der Schüler über England. Die Geschichte des Landes englisch repetirt. Schmick's sketches from English history theilweise ins Französische, aus Schiller's Geschichte des 30jährigen Krieges Kapitel ins Englische übersetzt; Prescott's history of Philipp II. Seite 1—50 vorgelesen. Shakespeare's Richard II. englisch interpretirt; eine Comödie von Brough nach Rollen gelesen. Aufsätze: biography of Shakespeare, Richard II., the American war, Keller in Egypt (nach Thiers) ꝛc.

Mathematik, 5 St. w. Herr Professor Gronau.

a) Arithmetik 3 St. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Diophantische Gleichungen, Kettenbrüche, Combinationslehre, binomischer Lehrsatz. Die logarithmische und Exponentialreihe, die Reihenentwickelung für Sinus und Cosinus. Rentenrechnungen.

b) Geometrie 2 St. Ebene und sphär. Trigonometrie. Stereometrie. Lösung planimetrischer Aufgaben. Außer der Schulzeit wurden mit den älteren Schülern die Kegelschnitte und kub. Gleichungen, welche im vorigen Jahre abgehandelt waren, wiederholt.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Vergleichende Statistik des Preuß. Staates. Repetition des gesammten Unterrichtskursus.

Geschichte, 2 St. w. der Direktor. Die Geschichte der europäischen Staaten seit der französischen Revolution mit wiederholenden Rückblicken auf das übrige, bereits durchgegangene Feld der Geschichte. Erste Hälfte.

Naturwissenschaften, 6 St. w. Herr Dr. Bail.

a) Physik (4 St.) Mechanik und Statik. Aufgaben 2 St. Akustik, Wärmelehre 2 St. Experimente.

b) Chemie (2 St.) Metalle und die wichtigsten Kapitel der organischen Chemie durch Experimente erläutert. Wiederholung der Metalloide.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Freies Handzeichnen wie in der zweiten Klasse: Linearzeichnen. Practische Anwendung der Perspective beim Zeichnen nach der Natur, Geometrische Projectionslehre mit Einschluß der Durchschnitte ebener und gekrümmter Flächen und der von solchen eingeschlossenen Körper. Nivelliren unter gefälliger Leitung des Herrn Wegebaumeister Hartwig.

Den Unterricht in der **polnischen Sprache** ertheilt Herr Makowski vier Mal wöchentlich von 12 bis 1 Uhr Mittags. Die daran theilnehmenden Schüler (etwa 40) aller Klassen wurden nach Maßgabe ihrer Fähigkeiten und Fortschritte in zwei Abtheilungen, und zwar jede derselben 2 Stunden wöchentlich, unterrichtet. Die zweite (untere) Abtheilung lernte aus dem Uebungsbuche Wypis die richtige Aussprache, das korrekte Lesen und die Anfangsgründe der Grammatik, memorirte Vokabeln und versuchte sich in leichten Uebersetzungen der Lesestücke des genannten Buches. Die erste benutzte das Lehrbuch von Poplinski zum Einüben der nothwendigsten grammatischen Regeln und zum Uebersetzen schwieriger Stücke. In beiden Abtheilungen so viel als möglich Sprechübungen.

Der Unterricht im **Turnen** ist von Herrn Grüning während der Sommermonate, als ein jetzt obligatorischer, sämmtlichen Schülern, die nicht davon dispensirt waren, und während des Winters privatim nur denen ertheilt worden, die sich freiwillig dazu meldeten und ein besonderes Honorar dafür zahlten. — Das Turnfest, dessen Anordnung — bei welcher die so schätzbar gewesene Mitwirkung des, nicht mehr vorhandenen, Turnrathes fehlte — auf nicht zu beseitigende Schwierigkeiten stieß, hat in diesem Jahre nicht stattfinden können. Für das dabei entbehrte Vergnügen haben die Schüler jedoch durch die noch glänzendere Feier des funfzigsten Jahrestages der Leipziger Schlacht (S. Abschnitt VI.) reichen Ersatz erhalten.

Beaufsichtigung und Nachhülfe bei ihren Schularbeiten können die Schüler von den Herren Real-Schullehrer Hardt, Real-Schullehrer Schultze, Hugen und Reinke erhalten; sowie auch Privatunterricht in der Stenographie, im Zeichnen und Schreiben von Herrn Krahn und Gesang- und Musik-Unterricht von Herrn Reinke.

III. Lehrmittel in den Händen der Schüler.

In **Prima**: Christliche Sittenlehre. Für die St. Johannis-Schule. Von dem Direktor derselben Dr. Löschin. Christliche Glaubenslehre nach der Augsburgischen Konfession, für die St. Johannisschule (von Dr. Löschin). — Siberti-Meiring's Lateinische Grammatik. — Virgil. Aeneis. — Herrig: la France littéraire. Ploetz franz. Grammatik, 2ter Cursus. — Prescott: history of Philip II. Vol. I. — The Bengal tiger, a farce. — Schmick: sketches from English history. — Chronologische Memoranda, für Prima und Sekunda der St. Johannisschule. (Von Dr. Löschin). — Kartons und Konturen zur weiteren Ausführung bei dem Geschichtsunterrichte in Prima und Sekunda der St. Johannisschule, von Dr. Löschin. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterrichte. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Naturgeschichte von Neumann. Chemie von Horning. Physik von Koppe. — Koppe's Planimetrie und Stereometrie. La Lande's mathematische Tafeln.

In **Sekunda**: Christliche Sittenlehre. Für die St. Johannisschule. Von dem Direktor derselben Dr. Löschin. Christliche Glaubenslehre nach der Augsburgischen Confession. — Siberti-Mei-

ring's lateinische Grammatik. — Caesar bell. Gall., Ovid. Metam. ed. Siebelis. — Herrig: Premières lectures françaises. — Plötz: Elementargrammatik der franz. Sprache, II. Kursus. — Herrig: First English Reading Book. — Zimmermann's englische Grammatik 2ter Theil. — Chronologische Memoranda für Prima und Sekunda der St. Johannisschule, (von Dr. Löschin). — Kartons und Konturen u. s. w. von Dr. Löschin. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterrichte. Atlas von Voigt oder Sydow. — Naturgeschichte von Neumann. — Chemie von Horning. — Physik von Koppe. — Koppe's Planimetrie und Stereometrie. Mehler's Elementarmathematik.

In **Tertia** A. und B.: Christliche Sittenlehre. Für die St. Johannisschule. Von dem Direktor derselben Dr. Löschin. Siberti-Meirings lateinische Grammatik. Desselben Uebungen zur lateinischen Grammatik für mittlere Klassen. Caesar de bello Gallico. Phaedrus ed. Raschig. — Gedichte von Schiller. — Französische Grammatik von Plötz, II. Kursus. Französisches Lesebuch von Mager, II. Kursus. — Geschichtstabellen zum Auswendiglernen, von Dr. Hirsch. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. Atlas von Voigt oder Sydow. — Naturgeschichte von Neumann. — Mehler's Elementarmathematik.

In **Quarta** A. und B.: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — Mager's Deutsches Lesebuch, I. Theil. — Siberti-Meirings Lateinische Grammatik. Cornel. Nepos. Phädrus, Ausg. v. Raschig. — Franz. Grammatik v. Plötz, I. Kursus. Magers Franz. Lesebuch, I. Kursus. Plötz Petit Vocabulaire. — Geschichtstabellen zum Auswendiglernen, v. Dr. Hirsch. — Voigts Leitfaden beim geographischen Unterricht. Atlas von Voigt oder Sydow. — Neumanns Naturgeschichte. — Mehlers Elementarmathematik. Stubba's Rechnungsaufgaben Heft IV., V., VI.

In **Quinta** A. und B.: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — Deutsches Lesebuch von Mager, I. Theil. — Lateinisches Elementarbuch von Bleske. — Plötz: Französisches Elementarbuch, I. Kursus. Plötz: Petit vocabulaire. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Geschichtstabellen von Dr. Hirsch. — Stubba's Aufgaben zum Rechnen. Heft IV.

In **Sexta** und in der ersten Vorschulklasse: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. Der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin. — Lateinisches Elementarbuch von Bleske. Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Stubba's Aufgaben zum Rechnen. Heft I. und II.

In der II. Vorschulklasse: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — A. Der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin. — B. Erstes Lesebuch von Sostmann. — Uebungsbuch von Borkenhagen.

IV. Vermehrung der Lehrmittel der Schule.

Für die Schulbibliothek wurden angeschafft die Fortsetzungen von Karsten's „Encyklopädie der Physik", von der Zeitschrift „für die gesammten Naturwissenschaften", von Klöden's Handbuch der Geographie, von Grimm's „Deutschem Wörterbuche", von Petermann's „Geographischen Mittheilungen", von Schlömilch's „Zeitschrift für Mathematik", von Wagner's „Jahresbericht der Technologie", von Herrig's „Archiv für das Studium der neueren Sprachen" und von Stiehl's Centralblatt für die gesammte Unterrichtsverwaltung in Preußen." — Sodann Mushacke's „Schulalmanach für 1863, — Dienger, „Differentialrechnung, 3 Bd., — Gottlieb's „Chemie", — Will's „Anleitung der chemischen Analyse", nebst Tafeln, — Wiedemann's „Galvanismus", — Dahamel's „Lehrbuch der reinen Mechanik", — Schlömilchs „Kompendium der höheren Analysis" 1ster Bd., — Meyer's: „Shakespeares Verletzung der historischen und natürlichen Wahrheit."

An Geschenken erhielt die Schule von den Verfassern oder Verlagshandlungen: „Evangelisches Gesangbuch für Schule und Haus, von Blume, Götting., Ruprecht 1863"; — „Elementargrammatik der französischen Sprache, von Ferd. Kleim, Breslau, Trewendt 1863"; — Grundriß der Zoologie,

von Karsch, Münster, Brunn, 1863"; — „Das Pflanzenreich, von Schilling (mit 523 Abbildungen, Breslau, Hirt, 1864"; — „Das Thierreich, von Schilling (mit 568 Abbildungen, Breslau, Hirt, 1864"; — „Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie, von Gandtner und Junghans Thl. I. (mit 6 Figurentafeln), Berlin, Weidmann, 1863"; — „Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren, von Gronau, Danzig, 1863." — „Deutsche Dichtung, Leitfaden für höhere Schulen, von Buchner, Essen, 1863"; — „Grundriß der alten Geschichte von Voigt, Berlin, Dümmler, 1862"; — „Die Freiheitskriege, von Pierson, Berlin, Klemann, 1863"; — „Lateinische Vorschule 1ster Cursus, von Plötz, Berlin, Herbig, 1863." — „Mechanik von Duhamel"; — Nautischer Almanach von Bremiker für 1864 u. 65. — Von dem Königl. Hohen Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten erhält die Schule als ein Geschenk: „Die Gründung der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, von Köpke, Berlin 1860."

Für die physikalische Sammlung wurden angeschafft: ein Barometer, ein Zeigertelegraph und drei grovesche Elemente. — Durch den Kostenaufwand, den die mehr als gewöhnliche Bogenzahl des vorjährigen Programmes und die demselben beigegebenen Zeichnungen verursacht hatten, waren für dieses Jahr die Mittel zu größern Ankäufen naturwissenschaftlicher Instrumente nicht vorhanden.

Für den Unterricht im Zeichnen sind 180 Vorlegeblätter angeschafft worden.

V. Schüler-Zahl.

Diese betrug am Schlusse des vorigen Schuljahres 542. Der Abgang derselben belief sich im Laufe desselben auf 106, die Aufnahme auf 102, so daß die Schule jetzt 538 Schüler zählt, von denen sich 130 in der Vorschule (72 in I., 58 in II.) und 408 in den Realklassen (17 in I., 31 in II., 36 in III. A., 40 in III. B., 50 in IV. A., 45 in IV. B., 47 in V. A., 46 in V. B., 50 in VI. A. und 46 in VI. B.) befinden.

VI. Schul-Chronik.

Das nicht lange vor dem Beginne des Lehrjahres feierlich begangene und erst nach der öffentlichen Prüfung wiederkehrende Geburtstagsfest Sr. Majestät des Königes steht der Schule in diesem Kursus noch bevor und wird mit herzlicher Theilnahme und gebührenden Ehren von ihr gefeiert werden. — Ein andres vaterländisches Fest, an dessen, zum ersten Male vorgekommener, Jubelfeier der jetzigen Schülergeneration die Theilnahme vergönnt war, nämlich das des funfzigsten Jahrestages der Schlacht bei Leipzig, ist (am 18. Oktober 1863) in glänzender und bedeutsamer Art von ihr in Gemeinschaft mit den andern höheren Lehranstalten unserer Stadt und mit Theilnahme von Seiten der hiesigen Mittelschulen und Elementar-Knabenschulen begangen worden. Die verehrlichen Kommunalbehörden hatten die zur Deckung der Kosten erforderliche Summe bewilligt und einige achtbare Mitglieder der Stadtverordneten-Versammlung waren von Derselben zu Kommissarien bei dem Feste ernannt worden. Diese vereinigten sich mit der Schuldeputation zu einem, die Anordnungen treffenden und die Ausführung leitenden, Vorstande, der sich der Sache mit dem lebhaftesten Interesse annahm. Nachdem am Vormittage in den Lokalen der Schulen eine mit Gesang und Festrede begangene Feier des Jubeltages stattgefunden, zogen am Nachmittage, von ihren Lehrern geführt, die, ihre Turnfahnen tragenden, Schüler in geordneten Reihen aus diesen Lokalen vor das Olivaer Thor, schlossen sich in den beiden Lindenalleen zu größeren Zügen zusammen, die sich, von Musik begleitet, nach der Turnwiese im Jäschkenthale begaben. Hier angelangt stellten sich die sämmtlichen Schüler mit ihren Lehrern in einem Kreise um die Rotunde auf, es ertönte ein im all-

gemeinen Chore gesungenes Lied und der von dem genannten Vorstande freundlichst damit beauftragte Direktor der St. Johannisschule hielt die Festrede, forderte am Schlusse derselben die aus den höheren Lehranstalten zur Pflanzung einer Gedenkeiche Gewählten zur Vollziehung dieses Werkes auf und sprach, nachdem es vollendet worden, die feierliche Weihe darüber aus. Ein fröhlicher Chorgesang beschloß den festlichen Akt und nach einer Erholungspause eilte die muntere Jugend zu den drei, für das Gymnasium und die Realschulen von dem Vorstande dazu bestimmten, Höhen, trug das am Fuße derselben dazu bereit liegende Scheitholz hinauf, legte es zu Haufen zusammen und hoch loderten von den Spitzen der Höhen weit leuchtende Flammen empor. Buntfarbige bengalische Feuer umgaben die heitere Scene mit zauberischem Glanze und aufsteigende Raketen streuten Funkenregen und hellstrahlende Leuchtkugeln vom dunklen Himmel herab. Musik und Gesang erhöhten die Fröhlichkeit, welche die zahlreiche Menge von Zuschauern mit der lebensfrischen Jugend theilte. Der dann über den Zigankenberg genommene Rückweg zur Stadt wurde von den dem Zuge vorangetragenen Fackeln und von aufgestellten brennenden Theertonnen beleuchtet.

VII. Die Abiturientenprüfung

fand im verflossenen Schuljahr zweimal statt; die erste am 25. September v. J., und es waren dazu von dem Hochverordneten Königlichen Provinzial-Schulcollegium Herr Provinzial-Schulrath Dr. Schrader, von dem Hochlöblichen Magistrate unserer Stadt Herr Stadt-Schulrath Dr. Kreyenberg als Commissarien deputirt worden.

Zu den schriftlichen Arbeiten hatten die Examinanden folgende Themata erhalten:

im Deutschen: Wer Recht will thun, immer und mit Lust,
Der hege wahre Lieb' in Sinn und Brust.

im Französischen: Campagne de Napoléon en Russie.

im Englischen: wurde als Exercitium die Uebersetzung eines Stücks aus Schiller's dreißigjährigem Kriege (Wallenstein vor Stralsund) angefertigt.

in der Mathematik:

Algebra:

In einer arithmetischen stetigen Proportion ist die Summe aller drei Glieder = a und die Summe ihrer Cuben = b. Wie heißt die Proportion?

Geometrie:

Zur Construction eines Dreiecks ist gegeben die Grundlinie, die Summe der beiden andern Seiten und der Radius des einbeschriebenen Kreises.

Trigonometrie:

Ein Dreieck zu berechnen, wenn gegeben ist, die Differenz der Winkel an der Grundlinie, die Höhe und die Summe der beiden andern Seiten.

Stereometrie:

Von einem abgestumpften Kegel ist der Radius der größeren Grundfläche, die Höhe und der Inhalt gegeben. Man soll finden, wieweit beide Grundflächen von der Spitze des zugehörigen vollständigen Kegels entfernt sind.

in den Naturwissenschaften:

Angewandte Mathematik:

a. Eine schiefe dreiseitige Pyramide habe einen Kubikinhalt von 18 Kubikzoll, die Seiten ihrer Basis seien 3, 4 und 5″ lang, die Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Basis bilde mit letzterer einen Winkel von 30°; wie hoch liegt der Schwerpunkt der Pyramide senkrecht über der Basis?

b. Denken wir uns eine schiefe dreiseitige Pyramide von derselben Basis und Neigung; welches ist dann der äußerste Grenzwerth für die senkrechte Entfernung des Schwerpunktes von der Basis, bei welchem die Pyramide noch auf der Basis stehen kann?

c. kann also die in a gegebene Pyramide auf ihrer Basis stehn oder nicht?

Physik:

Man hat gefunden, daß in einem Crownglas-Prisma, dessen brechender Winkel 60° beträgt, der Winkel der kleinsten Ablenkung für rothes Licht 46° 15′ 37,7″ groß ist.

a. Wie groß ist der Brechungs-Exponent für Crownglas und rothe Strahlen?

b. Wie groß ist der Grenzwinkel für rothe Strahlen, die aus Crownglas in die Luft austreten? Das Resultat b. ist ausführlicher zu besprechen.

Chemie:

Welchen Gebrauch macht man von den Verbindungen des Schwefels mit Sauerstoff und deren Salzen bei der Herstellung verschiedener farbloser und gefärbter Zeuge? — Hierzu als stöchiometrische Aufgabe: Man kann Berlinerblau auch darstellen aus gelbem Blutlaugensalz und Eisenchlorid; wieviel braucht man von diesen Stoffen, wenn beide wasserfrei gedacht werden, zur Darstellung von $\frac{1}{4}$ Ctr. Berlinerblau?

Den Examinanden:

1) Bernhard Friedrich Alexander Neumann, geb. im Juli 1842, 3 Jahre in der Schule, $2\frac{1}{2}$ in Prima,

2) Julius Edwin v. Radomski, geb. im Oktober 1842, $6\frac{1}{2}$ Jahre in der Schule, $2\frac{1}{2}$ in Prima,

wurde nach der mit ihnen abgehaltenen mündlichen Prüfung das Zeugniß der Reife, und zwar v. Radomski mit dem Prädikate: gut bestanden, Neumann mit dem Prädikat: genügend bestanden, zuerkannt.

Außerdem erhielt, als Extraneus, der dazu in einer andern Realschule I. Ordnung vorbereitete Schüler Louis Gustav Draband, geb. im Juli 1843, der sich, da in derselben zu diesem Termine keine Abiturienten-Prüfung stattfand, zu der in der St. Johannis-Schule abzuhaltenden gemeldet hatte, das Zeugniß der Reife mit dem Prädikate: genügend bestanden.

Die zweite Abiturientenprüfung fand am 22. Februar d. J. statt, und es waren dazu von dem Hochverordneten Königlichen Provinzial-Schulcollegium ebenfalls Herr Provinzial-Schulrath Dr. Schrader, von dem Hochlöblichen Magistrate unserer Stadt Herr Stadt-Schulrath Dr. Kreyenberg als Kommissarien deputirt worden.

Zu den schriftlichen Arbeiten hatten die Examinanden folgende Themata erhalten:

im Deutschen: Wie ist es zu erklären, daß die Jugend in der Regel so kriegslustig ist?

im Französischen: wurde als Exercitium eine Stelle aus Schiller's Geschichte des dreißigjährigen Krieges (Torstenson) gegeben.

im Englischen: What significance had the second of January 1864 for Dantzic.

in der Mathematik:

Planimetrie:

Es ist ein Kreis gegeben und außerhalb desselben eine Linie A B; man soll an den Kreis eine Tangente ziehen, so daß, wenn man von A und B auf diese Tangente Lothe fällt, die beiden Lothe zusammen = A B sind.

Trigonometrie:

Ein Dreieck zu berechnen, wenn gegeben ist die Differenz zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel an der Spitze und die Differenz der durch die Höhe erhaltenen Segmente der Grundlinie.

Kegelschnitte.

Von einem Paraboloid kennt man den Parameter und den Inhalt; wie groß ist von einem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, die Gesammtoberfläche?

Algebra:

Die Summe zweier Zahlen mit der Differenz ihrer Quadrate multiplizirt ist = a, aber die Differenz dieser Zahlen mit der Summe ihrer Quadrate multiplizirt ist = b.

Welche Zahlen sind es?

in den Naturwissenschaften:

Physik:

1) Aus der angewandten Mathematik:

Bouguer fand 1736, daß ein Pendel, welches am Ufer des Meeres in 24 Stunden 98770 Schwingungen machte, auf dem Pichincha in gleicher Zeit nur 98720 zurücklegte;

a) wie verhält sich demnach die Größe der Beschleunigung auf dem Berge zu der am Meere, diese als Einheit genommen? b) Um welchen Theil seiner Länge hätte das Pendel verkürzt werden müssen, wenn es auf dem Pichincha ebensoviel Schwingungen hätte machen sollen, als am Ufer des Meeres? c) Um welchen Theil der Länge hätte Bouguer sein Pendel verlängern müssen, wenn es am Ufer des Meeres hätte Secunden schlagen sollen?

2) Aus der Physik im engern Sinne.

Nach Pouillet's Versuchen ist die mittlere spezifische Wärme des Platina's zwischen 0^0 und t^0 C: $s = 0{,}03308 + 0{,}0000042\ t$. — Um die Temperatur eines Ofens zu bestimmen, legt man eine Platinkugel in denselben und wirft sie, nachdem sie die Temperatur des Ofens angenommen hat, in Wasser. Das Gewicht der Platinkugel beträgt 100 Gramme, das Gewicht des Wassers 1 Kilogramm; die Temperatur des Wassers wird durch die Aufnahme von Wärme aus dem Platina von 5^0 C auf 10^0 C erhöht. Wie hoch war die Temperatur des Ofens?

Chemie:

Man will zwei Stunden lang Drummond'sches Licht erzeugen; wenn man dazu in der Minute durchschnittlich 18 Kubikzoll (d. dc.) des Gasgemenges benutzt, so wird gefragt, wieviel ist erforderlich

a) Zink und Schwefelsäure,

b) von dem nicht zu theuern Stoffe oder den Stoffen, die sich der Abiturient zur Darstellung des Sauerstoffes auswählen mag? Das spez. Gewicht des Wasserstoffgases darf dabei nicht als bekannt vorausgesetzt werden, sondern ist aus dem spez. Gewicht der Luft $\left(= \frac{1}{770}\right)$ und den betreffenden Volumen- und Aequivalentverhältnissen zu berechnen.

c) Sollen noch vier andere häufig eingeschlagene Wege zur Sauerstoffbereitung angegeben und es soll berechnet werden, wieviel % des in der Verbindung enthaltenen Sauerstoffs in jedem einzelnen Falle zu gewinnen sind.

1 Kubikfuß Wasser wiegt 61,83 Pfd. —

Den Examinanden:

1) George Leopold Brutus Kollm, geb. im August 1846, 10 Jahre in der Schule, 2 in Prima;
2) Benjamin Wilhelm Otto Statzkowski, geb. im Dezember 1844, 7 Jahre in der Schule, 2 in Prima,
3) Heinrich Rudolf Conrad, geb. im Februar 1846, 6 Jahre in der Schule, 2 in Prima,
4) Franz Eduard Dahms, geb. im November 1843, $4^1/_2$ in der Schule, 2 in Prima,
5) Martin Friedrich Drewes de Jonge, geb. im Oktober 1844, 5 Jahre in der Schule, 2 in Prima,
6) Otto Theodor Grisch, geb. im Dezember 1845, 11 Jahre in der Schule, 2 in Prima,
7) Georg Theodor Gottlieb Monglowski, geb. im November 1845, $11^1/_2$ Jahre in der Schule, 2 in Prima,

wurde nach der mit ihnen abgehaltenen mündlichen Prüfung das Zeugniß der Reife, und zwar Kollm und Statzkowski mit dem Prädikate: gut bestanden, allen übrigen mit dem Prädikate: genügend bestanden, zuerkannt.

VIII. Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Schuljahre von Ostern 1863 bis 1864.

Lehrer.	Ordin.	Realschule. I.	II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI. A.	VI. B.	Summa.	Vorschule. I.	II.	Summa.
1. Direktor Dr. **Löschin**	I.	2 Relig. 2 Gesch. 2 Deutsch	2 Relig. 2 Gesch.	2 Religion		2 Religion						14			
2. Oberlehrer **Küster**	IV.A				3 Deutsch	6 Latein 3 Deutsch 2 Gesch.		6 Latein				20			
3. Oberlehrer Professor **Gronau**	III B	5 Math.	5 Math.	4 Math.	6 Math.							20			
4. Oberlehrer Dr. **Panten**	II.	2 Geogr. 2 Deutsch	2 Geogr. 4 Deutsch	2 Geogr. 2 Gesch.	2 Geogr. 2 Gesch.	2 Geogr.						20			
5. Ordentlicher Lehrer **Stobbe**	III A	3 Latein	4 Latein	5 Latein 3 Deutsch	5 Latein		2 Gesch.					22			
6. Ordentlicher Lehrer Dr. **Laubert**		3 Engl. 4 Franz.	3 Engl. 4 Franz.	4 Engl.	4 Engl.							22			
7. Ordentlicher Lehrer Dr. **Bail**		6 Natur-wissensch.	6 Natur-wissensch.	2 Naturw. 2 Math.	2 Natur-wissensch.	2 Natur-wissensch.	2 Natur-wissensch.					22			
8. Ordentlicher Lehrer Dr. **Brandt**	IV B			4 Franz.	4 Franz.		6 Latein 5 Franz. 3 Deutsch 2 Geogr.					24			
9. Ordentlicher Lehrer **Schultze**	VI A							2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg. 5 Rechnen 2 Geogr. 2 Zeichnen	2 Naturg. 5 Rechnen 2 Geogr. 2 Zeichnen	26			
10. Kath. Rel.-L. Dr. theol. **Redner**		4 Katholische Religion in 2 Abtheilungen										4			
11. Wissensch. Hilfsl. P.-A.-C. **Hardt**	V. A.							3 Relig. 5 Franz. 3 Ggr.Gesch	3 Relig. 6 Latein 3 Ggr.Gesch	3 Religion 1 Gesch.	1 Gesch.	28			
12. Wissensch. Hilfslehrer **Schmidt**	VI.B									8 Latein 4 Deutsch	8 Latein 4 Deutsch	24			
13. Wissensch. Hilfslehrer **Mehler**						6 Math.	6 Math.	4 Rechnen 4 Deutsch	4 Rechnen			24			
14. Wissensch. Hilfslehrer vacat (ad int. Prediger **Weiß**)	V. B.					5 Franz.			5 Franz. 4 Deutsch			14			
15. Zeichnen- u. Schreiblehrer **Krahn**		3 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	3 Schreib.	3 Schreib.	31			
16. Elementarlehrer **Hugen**	E.II.												2 Geogr.	2 Relig. 10 Deutsch 6 Rechnen 6 Schreib.	26
17. Elementarlehrer **Reinke**	E. I.	4 Singen in 2 Abtheilungen								1 Singen			2 Relig. 8 Deutsch 6 Rechnen 6 Schreib. 2 Zeichnen 2 Singen	2 Singen	28

IX. Uebersicht der statistischen Verhältnisse der Realschule zu St. Johann

im Schuljahre von Ostern 1863 bis Ostern 1864.

Lehrer.

Direktor Dr. Löschin
Oberlehrer Küster
„ Professor Gronau
„ Dr. Panten
4r ordentl. Lehrer Stobbe
5r „ „ Dr. Laubert
6r „ „ Dr. Bail
7r „ „ Dr. Brandt
8r „ „ Schulbe
Pfarrer Dr. theol. Redner
Wiss. Hilfslehrer P.-A.-C. Hardt
„ „ Schmidt
„ „ Mehler
„ „ vacat. (In Vertretung Pred. Weiß)
Zeichnen- u. Schreiblehrer Krahn
1r Elementarlehrer Hugen
2r „ Reinke
Lehrer des Polnischen Makowski

Allgemeiner Lehrplan. Klassen und Stunden.

Fächer	I.	II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI. A.	VI. B.	Summa.	Vorschule I.	Vorschule II.	Summa.
Religion	2	2	2∞	2	2∞	2	3	3	3∞	3	17	2	2	4
Deutsch	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4	36	8	10	18
Latein	3	4	5	5	6	6	6	6	8	8	57	—	—	—
Französisch	4	4	4	4	5	5	5	5	—	—	36	—	—	—
Englisch	3	3	4	4	—	—	—	—	—	—	14	—	—	—
Geschichte und Geographie	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	36	2	—	2
Naturwissenschaften	6	6	2	2	2	2	2	2	2	2	28	—	—	—
Mathematik und Rechnen	5	5	6	6	6	6	4	4	5	5	52	6	6	12
Zeichnen	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	21	2	—	2
Schreiben	—	—	—	—	2	2	2	2	2	3	14	6	6	12
Summa	34	34	32	32	32	32	31	31	31	31	311			
Singen	— — ∞2 — — ∞2 — — 1∞1										5	2	2	4
Katholische Religion	— — ∞2 — — ∞2 — — ∞										4	28	26	54
Polnisch	— — ∞2 — — ∞2 — — ∞										4			

Verhältnisse der Schüler

in	waren	sind
I.	17	17
II.	40	31
III. A.	34	36
III. B.	38	40
IV. A.	49	50
IV. B.	49	45
V. A.	50	47
V. B.	50	46
VI. A.	88	50
VI. B.		46
Summa	415	408
Vorschule I.	60	72
„ II.	67	58
	127	130
Summa	542	538

Verhältnisse der Abiturienten

es wurden entlassen		widmen sich	
mit dem Zeugnisse der Reife a. zu Michaeli 1863 (Dazu 1 Extraneus)	2	dem Beamtenstande	4
b. zu Ostern 1864	7	dem Kaufmannsstande	3
		dem Militair	2
	9		9

Von diesen Stunden fallen bei I. und II. 2 Zeichenstunden, die Singstunden, 4 Stunden für den katholischen Religionsunterricht und 4 Stunden für Polnisch außerhalb der Schulzeit. Die combinirten Lectionen sind nur einfach gezählt

Das Zeichen ∞ bedeutet Combination.

X. Das öffentliche Examen,

zu welchem wir hiermit ergebenst einladen, wird in der Aula des Schulhauses an dem genannten Tage gehalten werden und um 8 Uhr Morgens seinen Anfang nehmen. Die dabei vorkommenden Gegenstände sind:

Vormittags.

Chorgesang und Gebet.

Vierte Klasse.	A. Latein. — Herr Oberlehrer Küster.
	B. Deutsch. — Herr Dr. Brandt.
	A. u. B. Mathematik. — Herr Realschullehrer Mehler.
Dritte Klasse.	A. u. B. Französisch. — Herr Dr. Brandt.
	A. u. B. Latein. — Herr Oberlehrer Stobbe.
Zweite Klasse.	Geographie. — Herr Oberlehrer Dr. Panten.
	Englisch. — Herr Dr. Laubert.
Erste Klasse.	Chemie. — Herr Dr. Bail.
	Geschichte. — Der Direktor.
	Mathematik. — Herr Professor Gronau.

Vor dem Abtreten jeder Klasse werden von den Schülern derselben memorirte Gedichte in englischer, französischer, polnischer und deutscher Sprache vorgetragen werden.

Gesang, geleitet von Herrn Reinke.
Rede den Direktors zur Entlassung der Abiturienten.

Nachmittags $2\frac{1}{2}$ Uhr.

Zweite Vorschulklasse.	Lesen. Rechnen. } — Herr Hugen.
Erste Vorschulklasse.	Deutsch. Rechnen. } — Herr Reinke.
Sechste Klasse.	A. u. B. Geographie. — Herr Realschullehrer Schultze.
	Latein. — Herr Realschullehrer Schmidt.
Fünfte Klasse.	A. u. B. Naturgeschichte. — Herr Realschullehrer Schultze.
	A. u. B. Religion. — Herr Realschullehrer Hardt.

Gesangproben, geleitet von Herrn Reinke.
Schlußgebet. — Choralgesang.

Der Schulunterricht wird nach dem Examen noch bis zum 23. März fortgesetzt, an welchem Tage die Vertheilung der Vierteljahrscensur und die Berufung in höhere Klassen stattfinden.

XI. Aufnahme neuer Schüler.

Der neue Unterrichtskursus beginnt am 7. April d. J. Zur Aufnahme neuer Schüler bin ich am 4., 5. und 6. April während der Vormittagsstunden, auch an jedem andern Ferientage, mit Ausnahme der Festtage, bis 9 Uhr Morgens in meiner Wohnung (Heil. Geistgasse 77) bereit.

Löschin.

Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen in eine Reihe, die nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung fortschreitet.

Die Kugelfunctionen sind nicht nur durch ihre zahlreichen Anwendungen auf Probleme der mathematischen Physik von der grössten Wichtigkeit, sondern sie bieten auch wegen ihrer vielen schönen Eigenschaften in rein mathematischer Hinsicht ein hohes Interesse dar. In der letzten Beziehung hat Cayley*) dadurch die Grundlage zu einer wesentlichen Erweiterung der Theorie gelegt, dass er den Begriff der Laplaceschen Functionen von zwei auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen ausdehnte und zwei Fundamentaleigenschaften der Kugelfunctionen auf diese neuen Functionen übertrug. Mit dem Beweise derselben Sätze beschäftigt sich auch Herr Heine in der Abhandlung: „Die speciellen Laméschen Functionen der ersten Art von beliebiger Ordnung; (November 1862)“,**) die ausserdem eine Reihe der schönsten Resultate für die speciellen Functionen enthält, welche in der allgemeinen Theorie an die Stelle der Kugelfunction $P_n(\cos\gamma)$ und ihrer Zugeordneten treten. Zu einer Zeit, als Herr Heine, durch dessen gefällige Mittheilungen ich auch zuerst auf die Abhandlung Cayley's aufmerksam gemacht wurde, seine Arbeiten über diesen Gegenstand noch nicht veröffentlicht hatte, war es mir gelungen, die Fourierschen und Laplaceschen Reihen auf Functionen von beliebig vielen Variablen zu übertragen. Die Anregung dazu empfing ich durch die Vorlesungen Dirichlet's über partielle Differentialgleichungen und über die Kräfte, welche im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirken; die offenbare Verwandtschaft und Zusammengehörigkeit der genannten Reihen liess leicht den richtigen Ausgangspunkt für die Uebertragung gewinnen, und die Durchführung war auf demselben Wege zu erreichen, auf dem man von den Eigenschaften des Potentials zu den Kugelfunctionenreihen gelangt. Der Inhalt dessen, was ich über diesen Gegenstand hier mitzutheilen beabsichtige, ist kurz folgender. Nachdem im ersten Paragraphen die Einführung eines $(n+1)$fachen Integrals an Stelle des Potentials auf den Ursprung und die Definition der Laplaceschen Functionen $n$ter Ordnung geführt hat, wird in § 2 durch Uebertragung einer characteristischen Eigenschaft, die das Potential einer Flächen-

*) Sur les fonctions de Laplace. Liouville's Journal. Bd. 13.

**) Borchardt's Journal, Bd. 62, S. 110—142. — Vorbereitet wurde diese Arbeit durch die Abhandlung: „Ueber einige bestimmte Integrale“ (Bd. 61, S. 356—367). Die ersten Hindeutungen auf den Gegenstand giebt Herr Heine in der Abhandlung: „Die Laméschen Functionen verschiedener Ordnungen.“ (Bd. 60.)

belegung auszeichnet, ein Hülfssatz gewonnen, der, (in § 3), ohne ein Eingehen auf specielle Functionen nöthig zu machen, mit Einem Schlage die gesuchte Reihenentwicklung liefert, zugleich auch die Fälle erkennen lässt, in denen der Werth der Reihe nicht mit dem der Function übereinstimmt, sondern einen gewissen mittleren Werth der Function in der Umgebung eines besonderen Werthsystems ausdrückt. Gelegentlich werden dann die beiden schon oben erwähnten Fundamentalsätze angeführt, von denen der erste leicht aus der Differentialgleichung der Laplaceschen Functionen, der zweite mit Hülfe des ersten aus den erhaltenen Reihen hervorgeht, und welche, wenn man sie auf andere Weise ableitet, auch umgekehrt zur Aufstellung der Reihen dienen können, jedoch ohne einen Anhalt in Betreff der eben angedeuteten Ausnahmefälle zu gewähren. Da die Art des Ueberganges von dem Hülfssatze zu den Reihen die Convergenz der letzteren zweifelhaft lässt, so ist ein Beweis derselben nothwendig. Dieser Beweis, der, wie ich glaube, bisher noch nicht geführt worden ist, wird im letzten Paragraphen wenigstens für die Functionen dritter Ordnung gegeben. Es zeigt sich, dass schon hier eine Divergenz eintreten kann in Ausnahmefällen, wie sie bei den Functionen zweiter Ordnung noch nicht vorkommen. Die Summation der allgemeinen Reihen, bei welchen die gehörige Deutung der auftretenden Convergenzbedingungen mit, wie es scheint, nicht unerheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist, muss einer späteren Bearbeitung vorbehalten bleiben; ebenso auch die Betrachtung gewisser neuen Reihen, welche aus denen des § 3 hervorgehen, wenn man die Anzahl der Variablen unendlich gross werden, die zu entwickelnde Function aber nur von einer bestimmten Zahl derselben in passender Weise abhängen lässt, und welche im Allgemeinen geeignet sind, eine beliebige Function von irgend einer Anzahl von Variablen für alle Werthe derselben zwischen $-\infty$ und $+\infty$ darzustellen.

---

§ 1.

Definition der Laplaceschen Functionen n^{ter} *Ordnung.*

Der Ausdruck der gegenseitigen Entfernung zweier Punkte (x_1, x_2, x_3) und (a_1, a_2, a_3), nämlich

$$r = \left[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

genügt, als Function von x_1, x_2, x_3 betrachtet, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_3^2} = 0.$$

Diese Eigenschaft ist dadurch von der grössten Wichtigkeit, dass sie als Ausgangspunkt für die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen dienen kann. Um nun diese Theorie auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen zu übertragen, muss man statt r den allgemeineren Ausdruck

$$R = \left[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_{n+1} - a_{n+1})^2\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

zu Grunde legen, welcher für $n = 2$ mit jenem zusammenfällt. Durch eine leichte Rechnung überzeugt man sich, dass R mit r die Eigenschaft theilt, dass es der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x_{n+1}^2} = 0$$

Genüge leistet. Damit wir nun auch eine Function der x erhalten, welche für $n = 2$ mit dem Potentiale eines beliebigen Massensystems coincidirt, so bilden wir, indem wir unter K' eine beliebige endliche Function der a verstehen, das $(n+1)$fache Integral:

$$v = \int^{(n+1)} \frac{K' \, d a_1 \, d a_2 \ldots d a_{n+1}}{R} = \int \frac{K' \, dt'}{R},$$

in welchem die Integrationsgrenzen durch irgend welche Ungleichheiten bestimmt sein mögen, die den Grössen $a_1, a_2 \ldots$ nur endliche Werthe anzunehmen gestatten. Das Werthsystem $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ möge ausserhalb des Umfanges der Integration liegen, d. h. es möge innerhalb der Integrationsgrenzen nicht gleichzeitig $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$, $\ldots a_{n+1} = x_{n+1}$ werden können; dann kann man die partiellen Derivirten von v, weil R^{-1} dann stets endlich bleibt, durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden, und findet also für v die Differentialgleichung:

$$(1.) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_{n+1}^2} = 0.$$

Der Fall eines inneren Werthsystems ist für den uns vorliegenden Zweck von keiner Bedeutung, und ich will nur beiläufig anführen, dass dann (1.) durch die Differentialgleichung

$$(1.^*) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_{n+1}^2} = -\frac{4 \pi^{\frac{1}{2}(n+1)} K}{\Gamma \frac{1}{2}(n-1)}$$

ersetzt werden muss, in welcher K den Werth bezeichnet, der aus K' durch Verwandlung der a in die x hervorgeht.

Wir wollen jetzt in v eine Vertauschung der Veränderlichen vornehmen, welche für $n = 2$ die Bedeutung der Verwandlung der rechtwinkligen in Polarcoordinaten hat, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \varphi_1, \quad x_2 = \varrho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 &= \varrho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varrho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n \\ x_{n+1} &= \varrho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-1} \sin \varphi_n. \end{aligned}$$

Es ist nützlich zu bemerken, dass man diese Substitution mittels Einführung von $n - 1$ Hülfsveränderlichen p durch n einfachere Substitutionen ersetzen kann, welche einer Veränderung von rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene in Polarcoordinaten gleichkommen, indem man nämlich successive setzt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p_{n-1} \sin \varphi_n, & x_n &= p_{n-1} \cos \varphi_n; \\ p_{n-1} &= p_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, & x_{n-1} &= p_{n-2} \cos \varphi_{n-1}; \\ p_{n-2} &= p_{n-3} \sin \varphi_{n-2}, & x_{n-2} &= p_{n-3} \cos \varphi_{n-2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_2 &= p_1 \sin \varphi_2, & x_2 &= p_1 \cos \varphi_2; \\ p_1 &= \varrho \sin \varphi_1, & x_1 &= \varrho \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Um nun die Transformation von (1.) zu bewerkstelligen, bemerke man, dass diese Differentialgleichung, ähnlich wie bei drei Veränderlichen, die Bedingung dafür ausdrückt, dass die Variation des Integrales $\int Q\,dt$, worin

$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_{n+1}}\right)^2$$

$$dt = dx_1\, dx_2 \dots dx_{n+1},$$

verschwinde. Indem man die Vertauschung der Veränderlichen in der angegebenen Weise nach und nach vornimmt, erhält man:

$$(dx_{n+1}\, dx_n) = p_{n-1}\,(dp_{n-1}\, d\varphi_n),\ (dp_{n-1}\, dx_{n-1}) = p_{n-2}\,(dp_{n-2}\, d\varphi_{n-1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(dp_2\, dx_2) = p_1\,(dp_1\, d\varphi_2),\quad (dp_1\, dx_1) = \varrho\, d\varrho\, d\varphi_1,$$

also:

$$dt = p_{n-1}\, p_{n-2} \cdots p_1\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \dots d\varphi_n,$$

oder, wenn man bedenkt, dass für $s = 1, 2, \dots, n-1$:

$$p_s = \varrho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_s$$

ist, und der Kürze wegen

$$P = \varrho^n \sin^{n-1}\varphi_1 \sin^{n-2}\varphi_2 \dots \sin^2\varphi_{n-2} \sin^1\varphi_{n-1}$$

setzt,

$$dt = P\, d\varrho\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \dots d\varphi_n,$$

ein Ausdruck, der zuerst in den Arbeiten Jacobi's auftritt.

Es ergeben sich ferner auf bekannte Weise leicht die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial p_{n-1}}\right)^2 + \frac{1}{p_{n-1}^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_n}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial p_{n-2}}\right)^2 + \frac{1}{p_{n-2}^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_{n-1}}\right)^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_1}\right)^2,$$

und durch deren Addition wird:

$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi_1}\right)^2 + \frac{1}{p_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi_2}\right)^2 + \frac{1}{p_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi_3}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p_{n-1}^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi_n}\right)^2.$$

Die gefundenen Werthe von Q und dt setze man in die Bedingungsgleichung $\delta \int Q\, dt = 0$ ein, so erhält man nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(P\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\frac{P}{\varrho^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\frac{P}{p_1^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi_2}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial\varphi_n}\left(\frac{P}{p_{n-1}^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi_n}\right) = 0.$$

Dividirt man noch beide Seiten dieser Gleichung durch $\frac{P}{\varrho^2}$ und setzt $p_s^2 = \varrho^2 q_s$, das heisst:

$$q_s = (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_s)^2,\ q_0 = 1,$$

so nimmt die so eben erhaltene Transformation der Differentialgleichung (1.) die Form an:

$$(2.)\quad \frac{1}{\varrho^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^n\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right) + \sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{q_{s-1}}\frac{1}{\sin^{n-s}\varphi_s}\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\left(\sin^{n-s}\varphi_s\frac{\partial v}{\partial\varphi_s}\right) = 0.$$

In dem Integrale, durch welches v definirt wurde, lasse man die der Substitution für die x entsprechende Veränderung der Integrationsvariablen eintreten, indem man setzt

$$a_1 = l \cos\lambda_1,\quad a_2 = l \sin\lambda_1 \cos\lambda_2,\ \ldots$$
$$a_{n+1} = l \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \ldots \sin\lambda_n,$$

dann wird:

$$v = \int \frac{K'\, dt'}{(l^2 - 2l\varrho\cos\omega + \varrho^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

wenn:

$$dt' = l^n \sin^{n-1}\lambda_1 \sin^{n-2}\lambda_2 \ldots \sin^1\lambda_{n-1}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_n,$$
$$\cos\omega = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1}}{l\varrho}, \text{ oder}$$
$$\cos\omega = \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 + \ldots$$
$$+ \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\lambda_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \cos\lambda_{n-1}$$
$$+ \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \ldots \sin\varphi_{n-1} \sin\lambda_{n-1} \cos(\varphi_n - \lambda_n).$$

Es ist jetzt zweckmässig, die Function v zu specialisiren, indem man $\frac{K'}{\varepsilon}$ statt K' setzt, unter K' eine von l unabhängige Function der λ und unter ε eine unendlich kleine Grösse versteht, nach l von 1 bis $1 + \varepsilon$ integrirt und o und π als Integrationsgrenzen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, dagegen o und 2π als die von λ_n nimmt. Macht man noch zur Abkürzung

$$\sin^{n-1}\lambda_1 \ldots \sin^1\lambda_{n-1}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = d\sigma'$$
$$\left(1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2\right)^{\frac{n-1}{2}} = r,$$

so geht v über in

$$(3.)\quad v = \int \frac{k'\, d\sigma'}{r}.$$

Welche Bedeutung diese Specialisirung hat, wird klar, wenn wir den Fall $n = 2$ ins Auge fassen; wir sind dann von dem Potentiale eines beliebigen Massensystems übergegangen auf das Potential einer Massenschicht von der variablen Dichte k', welche auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser 1 vertheilt ist. Je nach dem nun $\varrho < 1$ oder > 1, oder, bildlich ausgedrückt, je nach dem $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ ein inneres oder äusseres Werthsystem ist, werde v durch v_i oder v_a bezeichnet, so lässt sich v_i nach positiven und v_a nach negativen Potenzen von ϱ in eine, wie nicht schwer zu beweisen, convergente Reihe entwickeln. Diese Reihenentwicklungen haben die Form:

$$(3'.)\quad v_i = \sum_{m=o}^{m=\infty} \varrho^m X_m,$$

$$(3''.)\quad v_a = \sum_{m=o}^{m=\infty} \varrho^{-m-n+1} X_m,$$

und zwar bedeutet X_m, wie wohl zu beachten, in beiden Reihen dieselbe Function der φ; es ist nämlich, wenn $R_m(\cos\omega)$ den Coefficienten von ϱ^m in der Entwicklung von r^{-1} nach aufsteigenden Potenzen von ϱ bezeichnet,

$$(4.)\quad X_m = \int k'\, R_m(\cos\omega)\, d\sigma'.$$

Substituirt man die Ausdrücke in (3′.) und (3″.) statt v in (2.), so führt die Bedingung, dass der Coefficient von ϱ^{m}, resp. von ϱ^{-m-n+1}, verschwinden muss, zu der folgenden Differentialgleichung für X_m:

$$(5.)\quad m\,(m+n-1)\,X_m + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{q_{s-1}\,\sin^{n-s}\varphi_s}\,\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\left(\sin^{n-s}\varphi_s\,\frac{\partial X_m}{\partial\varphi_s}\right) = 0.$$

Da $R_m(\cos\omega)$ eine ganze rationale Function mten Grades von $\cos\omega$, so ist aus (4.) und vermöge der oben angegebenen Zusammensetzung von $\cos\omega$ aus den φ und λ einleuchtend, das X_m eine ebenfalls ganze und rationale Function der Grössen $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \ldots, \sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_n$ ist. Wir wollen nun allgemein eine jede Lösung Z_m der partiellen Differentialgleichung (5.), welche zugleich eine ganze Function (m ten Grades) der Grössen $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \ldots$ ist, eine Laplacesche Function n ter Ordnung nennen, so dass die gewöhnlichen Kugelfunctionen als Laplacesche Functionen zweiter Ordnung, und wenn man in (5.) den Werth $n = 1$ zulässt, die Kreisfunctionen als solche erster Ordnung erscheinen. Unsere Aufgabe besteht dann darin, eine beliebige Function f von n Variablen φ, welche für alle Werthe von φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ zwischen o und π und für alle Werthe von φ_n zwischen o und 2π gegeben ist, in eine Reihe $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots$ von Laplaceschen Functionen n ter Ordnung zu entwickeln. Bevor ich jedoch zur Lösung dieser Aufgabe übergehe, muss ich noch erwähnen, dass die Differentialgleichungen (2.) und (5.), fast in derselben Form, schon in der oben angeführten Abhandlung des Herrn Prof. Heine vorkommen und von demselben weit früher gekannt waren. Die Gleichung (5.) tritt dort zuerst für die specielle Function $X_m = R_m(\cos\omega)$ auf, und es wird dann die allgemeine Form von Z gesucht und die Anzahl der in ihr vorkommenden willkührlichen Constanten bestimmt. Diese Untersuchung, welche für eine speciellere Theorie dieser Functionen von grosser Wichtigkeit ist, kann für den uns vorliegenden Zweck ausser Acht gelassen werden. — Da übrigens Herr Heine die Rechnungen, durch welche man von (1.) zu (2.) und (5.) gelangt, nicht angiebt, so dürfte die hier gegebene Ausführung nicht unwillkommen erscheinen.

§ 2.

Verallgemeinerung eines Satzes über Flächenpotentiale.

Wenn ein materieller Punkt auf einer Normale einer mit Masse belegten Fläche fortrückend durch diese Fläche hindurchgeht, so erleidet die normale Componente der Anziehung bekanntlich eine sprungweise Aenderung um eine Grösse, welche gleich ist -4π mal der Dichtigkeit der Massenschicht an der betrachteten Stelle der Fläche. Diesen Satz, von welchem man weiss, dass er sofort die Reihenentwicklung einer Function von zwei Variablen nach Kugelfunctionen liefert, müssen wir jetzt zweckmässig verallgemeinern. Die dazu erforderliche Arbeit wird uns dadurch nicht unbedeutend erleichtert, dass wir die Uebertragung des Satzes, der für beliebige krumme Flächen Geltung hat, nur für den der Kugelfläche entsprechenden Fall durchzuführen brauchen. Wir haben also den Grenzwerth zu ermitteln, welchen die Differenz der Differentialquotienten $\frac{\partial v_a}{\partial\varrho}$ und $\frac{\partial v_i}{\partial\varrho}$ annimmt, wenn ϱ in dem ersten abnehmend, in dem zweiten

zunehmend gegen die Einheit hin convergirt, während die φ für beide die nämlichen Werthe besitzen. Diese Differenz, welche auch in der Form

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(1+\varepsilon)} - \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(1-\varepsilon)} = D \text{ (ε positiv unendlich klein)}$$

geschrieben werden kann, stellt sich, wenn man für v die Werthe in (3″.) und (3′.) benutzt, als der Unterschied zweier vielfachen Integrale dar, deren entsprechende Elemente sich unendlich wenig von einander unterscheiden mit Ausnahme derjenigen, für welche r einen sehr wenig von Null verschiedenen Werth hat. Nun wird aber r nur $= 0$, wenn gleichzeitig $\varrho = 1$, $\omega = 0$ ist, und es werden also diejenigen Elemente den Hauptbeitrag liefern, für welche ω in der Nähe von Null liegt. Man sieht hieraus, dass es zweckmässig sein wird, die Integrationsvariablen so zu verändern, dass eine derselben ω wird. Wir führen deshalb zunächst vorübergehend die a wieder ein, indem wir (3.) mit dem der Einheit gleichen Factor $(n+1)\int_0^1 l^n \, dl$ multipliciren, und erhalten

$$v = (n+1)\int \frac{k' \, da_1 \ldots da_{n+1}}{r},$$

während die Integrationsgrenzen durch die Ungleichheit

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n+1}^2 < 1$$

bestimmt sind. Man ersetze jetzt die a durch $n+1$ neue Variablen b vermöge der orthogonalen Substitution

$$(6.)\quad \begin{cases} a_1 = C_1^{(1)} b_1 + C_2^{(1)} b_2 + \ldots + C_{n+1}^{(1)} b_{n+1} \\ a_2 = C_1^{(2)} b_1 + C_2^{(2)} b_2 + \ldots + C_{n+1}^{(2)} b_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1} = C_1^{(n+1)} b_1 + C_2^{(n+1)} b_2 + \ldots + C_{n+1}^{(n+1)} b_{n+1}, \end{cases}$$

worin also die C den bekannten Bedingungen zu genügen haben, dass die Summe der Quadrate der C in einer und derselben Verticalreihe $= 1$, und die Summe der Producte von je zwei C aus zwei verschiedenen Verticalreihen $= 0$ ist. Es ist dann identisch

$$a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2 = b_1^2 + \ldots + b_{n+1}^2 = l^2,$$

und man hat:

$$b_1 = C_1^{(1)} a_1 + C_1^{(2)} a_2 + \ldots + C_1^{(n+1)} a_{n+1}.$$

Damit nun, wie wir es wünschen,

$$b_1 = l \cdot \cos \omega \text{ (man vergl. S. 5)}$$

werde, muss man für die Coefficienten in der ersten Verticalreihe die Werthe nehmen:

$$C_1^{(1)} = \frac{x_1}{\varrho} = \cos \varphi_1$$

$$C_1^{(2)} = \frac{x_2}{\varrho} = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1^{(n+1)} = \frac{x_{n+1}}{\varrho} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_n.$$

Von den übrigen Coefficienten bleibt eine gewisse Anzahl willkührlich, und man braucht die Ausdrücke derselben nicht zu kennen; doch wird die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass es insbesondere erlaubt ist, für die ite Verticalreihe die partiellen Derivirten der ersten nach φ_{i-1} zu setzen, wenn man die allen diesen Derivirten gemeinsamen Factoren fortlässt, d. h. dass man setzen darf:

$$C_i^{(k)} = \frac{1}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{i-2}} \frac{\partial C_1^{(k)}}{\partial \varphi_{i-1}}.$$

Durch Einführung der b statt der a ergiebt sich

$$v = (n+1) \int \frac{k' \, d b_1 \ldots d b_{n+1}}{r},$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n+1}^2 < 1,$$

oder wenn man für die b ein neues System von Polarcoordinaten

$$b_1 = l \cos\omega, \; b_2 = l \sin\omega \cos\omega_1, \ldots$$

anwendet und dann das Integral nach l wieder ausführt:

$$v = \int \frac{k' \, d\tau'}{\left(1 - 2\varrho \cos\omega + \varrho^2\right)^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$d\tau' = \sin^{n-1}\omega \sin^{n-2}\omega_1 \ldots \sin^1\omega_{n-2} \, d\omega \, d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1},$$

wofür wir lieber schreiben wollen:

$$v = \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F(\varrho) \sin^{n-2}\omega_1 \ldots \sin\omega_{n-2} \, d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1},$$

$$F(\varrho) = \int_0^{\pi} \frac{k' \sin^{n-1}\omega \, d\omega}{\left(1 - 2\varrho \cos\omega + \varrho^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Für unsere Differenz D haben wir also den Ausdruck:

$$D = \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Delta \sin^{n-2}\omega_1 \ldots \sin\omega_{n-2} \, d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1},$$

wenn

$$\Delta = F'(1+\varepsilon) - F'(1-\varepsilon)$$

gesetzt wird. Nun geht der Ausdruck von $F(\varrho)$ für $\varrho = 1 + \varepsilon$, wenn man gleichzeitig $\cos\omega = 1 - \frac{1}{2} z^2$ setzt, über in:

$$F(1+\varepsilon) = \int_0^2 \frac{k' \left(1 - \frac{1}{4} z^2\right)^{\frac{n}{2} - 1} dz}{\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}},$$

und durch Differentiation nach ε ergiebt sich, wenn man der Kürze halber

$$k' \left(1 - \frac{1}{4} z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1-n}{2} = h'$$

setzt:

$$F'(1+\varepsilon) = \int_0^2 \frac{h' \left(1 + \frac{2\varepsilon}{z^2}\right) d\,z}{\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Von diesem Ausdrucke hat man den durch Verwandlung von ε in $-\varepsilon$ daraus hervorgehenden zu subtrahiren, um den Werth von Δ zu erhalten. Man betrachte nun zuerst den folgenden Bestandtheil von Δ:

$$\int_0^2 h' \left[\frac{1}{\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{1}{\left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\right] d\,z\,;$$

derselbe nähert sich offenbar mit ε zugleich der Null, weil die in der Klammer befindliche Grösse für alle Werthe des z innerhalb der Integrationsgrenzen bei unendlich kleinem ε stets verschwindend klein bleibt. Den zweiten Bestandtheil, in welchem $\frac{2\varepsilon}{z^2}$ als Factor der Function unter dem Integralzeichen auftritt, zerlege man in zwei Integrale mit den Grenzen o und δ, δ und 2, und es bedeute δ eine Grösse, die mit ε zugleich gegen Null convergirt, jedoch in solchem Masse langsamer, dass

$$\lim \frac{\varepsilon}{\delta} = o, \quad \text{also} \lim \frac{\delta}{\varepsilon} = \infty$$

wird für ein unendlich abnehmendes ε. Alsdann ist zunächst das zweite Integral, nämlich:

$$\int_\delta^2 \left[\frac{h'}{\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{h'}{\left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\right] \frac{2\varepsilon}{z^2}\, d\,z$$

verschwindend klein, weil die eingeklammerte Grösse stets endlich und

$$\int_\delta^2 \frac{2\,\varepsilon\, d\,z}{z^2} = \frac{2\,\varepsilon}{\delta} - \varepsilon$$

nach dem, was soeben über die Art des Abnehmens von δ und ε festgesetzt wurde, einen ins Unendliche abnehmenden Werth hat. Es bleibt also als einziger Beitrag für den Werth von Δ das Integral

$$\int_0^\delta \left[\frac{h'}{\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{h'}{\left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\right] \frac{2\varepsilon}{z^2}\, d\,z$$

übrig, und man hat folglich, wenn (h′) einen Mittelwerth des h′ zwischen $z = o$ und $z = \delta$ bezeichnet und G (ε) das Integral

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{2\varepsilon}{z^2}\, dz$$

bedeutet:

$$\Delta = [G(\varepsilon) - G(-\varepsilon)] \cdot (h').$$

Es wird aber, wenn man $z = \varepsilon \sqrt{y}$ setzt:

$$G(\varepsilon) = \int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{y^{\frac{n}{2}-1}\, dy}{\left(1+y+\varepsilon y\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \text{ oder:}$$

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon y_1}{1+y_1}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{y^{\frac{n}{2}-1}\, dy}{\left(1+y\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$

wobei y_1 einen gewissen Zwischenwerth von y innerhalb der Integrationsgrenzen bedeutet. Der Factor vor dem Integralzeichen convergirt aber, wenn ε sich der Null nähert, gegen die Einheit hin, und die obere Grenze des Integrales wird ∞, also ist

$$G(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{n}{2}-1}\, dy}{\left(1+y\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}.$$

Denselben Grenzwerth hat $-G(-\varepsilon)$ und folglich ergiebt sich für Δ der Ausdruck

$$\Delta = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}\,(h'), \text{ oder}$$

$$\Delta = \frac{(1-n)\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}\,(k') = -\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}\,(k').$$

Daher ist

$$(7.)\quad D = -\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)} \int_0^{\pi} \cdot \cdot \int_0^{2\pi} (k') \sin^{n-2}\omega_1 \ldots \sin\omega_{n-2}\, d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1}.$$

In der Function k′ mussten die Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ vermittelst der Substitution (6.) durch die Variablen $\omega, \omega_1, \ldots$ und die bei der Integration als constant zu betrachtenden Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ersetzt werden, und es bedeutet (k′) den Werth von k′ für ein unendlich gegen Null hin abnehmendes ω. Aber für $\omega = 0$ folgt aus (6):

$$\cos\lambda_1 = \cos\varphi_1,\ \sin\lambda_1 \cos\lambda_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \text{ etc.,}$$

woraus, wenigstens wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ keinen der beiden Werthe 0 und π (resp. 0 und 2π) besitzen, die bestimmten Auflösungen

$$\lambda_1 = \varphi_1,\ \lambda_2 = \varphi_2, \text{ etc.}$$

hervorgehen. Es reducirt sich hiernach im Allgemeinen (k′) auf eine von $\omega_1, \omega_2, \ldots$

unabhängige Grösse k, welche aus k' erhalten wird, wenn man darin die λ mit den φ vertauscht, so dass $k = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ wird, wenn $k' = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Dadurch vereinfacht sich (7.) zu

$$D = -\frac{4\pi^{3/2}\Gamma(1/2\,n)}{\Gamma 1/2\,(n-1)}\, k\, A_{n-2}\, A_{n-1} \ldots A_2\, A_1,$$

wenn

$$A_m = \int_0^\pi \sin^m \omega'\, d\omega' = 2\int_0^{1/2\,\pi} \sin^m \omega'\, d\omega'.$$

Um den Werth dieses Integrales zu finden, setze man $\sin\omega' = \sqrt{z}$, so wird:

$$A_m = \int_0^1 z^{1/2(m+1)-1} (1-z)^{1/2-1}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma 1/2\,(m+1)}{\Gamma 1/2\,(m+2)},$$

und durch Substitution der hieraus für $A_{n-2}, \ldots, A_1$ hervorgehenden Werthe ergiebt sich schliesslich:

$$(7'.)\qquad D = -\frac{4\,\pi^{1/2\,(n+1)}}{\Gamma 1/2\,(n-1)}\, k.$$

Wenn die Variablen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ einen ihrer Grenzwerthe besitzen, oder wenn für ein besonderes Werthsystem $(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ die Function (k') für ein gegen Null convergirendes ω vieldeutig d. h. eine Function von $\omega_1, \omega_2, \ldots$ wird, so muss man auf die ursprünglich erhaltene Formel (7.) zurückgehen. Ist z. B. $\varphi_1 = 0$, so wird $\cos\omega = \cos\lambda_1$, d. h. $\lambda_1 = \omega$. Es ist also die Substitution (6.) hier unnöthig, oder man darf auch $\lambda_2 = \omega_1$, $\lambda_3 = \omega_2$ etc. nehmen. In der Formel (7) ist also

$$\text{für } \varphi_1 = 0 : (k') = f(0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}).$$

In ähnlicher Weise hat man

$$\text{für } \varphi_1 = \pi : (k') = f(\pi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}).$$

Nimmt man weiter $\varphi_2 = 0$, so ist

$$\cos\omega = \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos\lambda_2,$$

also ω nur von den beiden ersten λ abhängig. Man darf also auch nur für diese zwei neue Variablen ω und ω_1 einführen. Dies geschieht durch die Substitution

$$\begin{aligned}\cos\lambda_1 &= \cos\varphi_1 \cos\omega - \sin\varphi_1 \sin\omega \cos\omega_1\\ \sin\lambda_1 \cos\lambda_2 &= \sin\varphi_1 \cos\omega + \cos\varphi_1 \sin\omega \cos\omega_1\\ \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 &= \sin\omega \sin\omega_1,\end{aligned}$$

während $\lambda_3 = \omega_2$, $\lambda_4 = \omega_3$ etc. wird und der Ausdruck für das transformirte Element des Integrales keine andere Form annimmt, wie in dem allgemeinen Falle. Für $\omega = 0$ wird jetzt $\lambda_1 = \varphi_1$ und $\lambda_2 = 0$, also ist

$$\text{für } \varphi_2 = 0 : (k') = f(\varphi_1, 0, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}),$$

und in (7.) wird die Integration nach ω_1 ausführbar. Allgemein hängt (k') für $\varphi_m = 0$ oder π noch von $\omega_m, \cdot \cdot, \omega_{n-1}$ ab und der Ausdruck für D in (7.) reducirt sich auf ein (n — m)faches Integral. Endlich ist noch zu bemerken, dass D für $\varphi_n = 0$ und $\varphi_n = 2\pi$ einen und denselben Werth hat, und dass dieser durch (7'.) dargestellt wird, wenn man darin anstatt k den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left[f(\varphi_1, \cdot \cdot, \varphi_{n-1}, 0) + f(\varphi_1, \cdot \cdot, \varphi_{n-1}, 2\pi)\right]$$

substituirt. — Die Begründung der zuletzt ausgesprochenen Behauptungen kann hier um so eher unterbleiben, als im letzten Paragraphen ähnliche Betrachtungen wiederkehren.

§ 3.

Allgemeine Form der Reihen. — Zwei allgemeine Sätze.

Wir haben jetzt unser nächstes Ziel, die allgemeine Form der Entwicklung einer Function nach Laplace schen Functionen zu bestimmen, erreicht. Denn setzen wir in die vorhin erhaltene Gleichung (7.')

$$k = \frac{\Gamma^{1/2}(n-1)}{4\pi^{1/2(n+1)}}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{1-\varepsilon} - \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{1+\varepsilon}\right\}$$

die aus (3'.) und (3''.) für $\varrho = 1$ sich ergebenden Werthe

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{1-\varepsilon} = \sum_{m=0}^{m=\infty} m\, X_m, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{1+\varepsilon} = -\sum_{m=0}^{m=\infty}(m+n-1)\, X_m$$

und für die Laplace sche Function X_m den in (4.) befindlichen Ausdruck ein, so erhalten wir:

$$\text{(I.)} \quad k = \frac{\Gamma^{1/2}(n-1)}{4\pi^{1/2(n+1)}} \sum_{m=0}^{m=\infty}(2m+n-1)\int k'\, R_m(\cos\omega)\, d\sigma'.$$

Die in dem allgemeinen Gliede der Reihe auftretende specielle Laplace sche Function $R_m(\cos\omega)$ hat, je nachdem n eine ungerade Zahl $2\mu + 1$ oder eine gerade $2\mu + 2$, einen verschiedenen Character. In dem einen oder dem anderen Falle ist $R_m(\cos\omega)$ der Coefficient von ϱ^m in der Entwicklung von

$$\left(1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2\right)^{-\mu} \text{ oder von } \left(1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2\right)^{-\mu - 1/2}$$

nach Potenzen von ϱ. Bildet man nun von jeder der Reihen

$$\log(1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2) = \sum_{s=1}^{s=\infty} - \frac{2\varrho^s \cos(s\omega)}{s}$$

$$\left(1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2\right)^{-1/2} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\varrho^s\, P_s(\cos\omega)$$

den μten Differentialquotienten nach der Grösse $\cos\omega = z$, so ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten von $\varrho^{m+\mu}$ auf beiden Seiten die auch von Herrn Heine gefundenen Ausdrücke:

$$n = 2\mu + 1,\ R_m(\cos\omega) = \frac{1}{(m+\mu)\, 2^{\mu-1}\, \Gamma(\mu)} \frac{d^\mu \cos(m+\mu)\omega}{dz^\mu};$$

$$n = 2\mu + 2,\ R_m(\cos\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\mu\, \Gamma(\mu+{}^1\!/_2)} \frac{d^\mu P_{m+\mu}(z)}{dz^\mu}.$$

Die Reihe (I.) nimmt also, je nach dem k gleich einer Function f von $2\mu+1$ oder von $2\mu+2$ Variablen φ ist, die erste oder die zweite der beiden folgenden Formen an:

$$(I^a.)\quad f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2\mu+1})$$

$$= \frac{1}{2^\mu\, \pi^{\mu+1}} \sum_{m=0}^{m=\infty} \int f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2\mu+1}) \frac{d^\mu \cos(m+\mu)\omega}{dz^\mu}\, d\tau,$$

worin:

$$d\tau = \sin^{2\mu}\lambda_1 \sin^{2\mu-1}\lambda_2 \ldots \sin\lambda_{2\mu}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{2\mu+1}$$

$$z = \cos\omega = \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 + \ldots$$

$$+ \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \ldots \sin\varphi_{2\mu} \sin\lambda_{2\mu} \cos(\varphi_{2\mu+1} - \lambda_{2\mu+1}).$$

$$(I^b.)\quad f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2\mu+2})$$

$$= \frac{1}{2^{\mu+2}\, \pi^{\mu+1}} \sum_{m=0}^{m=\infty} (2m+2\mu+1) \int f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2\mu+2}) \frac{d^\mu P_{m+\mu}(z)}{dz^\mu}\, d\tau,$$

worin:

$$d\tau = \sin^{2\mu+1}\lambda_1 \sin^{2\mu}\lambda_2 \ldots \sin\lambda_{2\mu+1}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{2\mu+2}$$

$$z = \cos\omega = \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 + \ldots$$

$$+ \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \ldots \sin\varphi_{2\mu+1} \sin\lambda_{2\mu+1} \cos(\varphi_{2\mu+2} - \lambda_{2\mu+2}).$$

Die Integrationsgrenzen sind in Bezug auf alle Variablen 0 und π, nur für die letzte 0 und 2π.

Es muss aber sogleich bemerkt werden, dass die Gültigkeit dieser Reihen hiermit noch keineswegs streng bewiesen ist. Wir haben uns nämlich am Anfange dieses Paragraphen stillschweigend erlaubt, in den aus (3'.) und (3''.) durch Differentiation nach ϱ entstehenden Reihen für ϱ statt der unendlich wenig von 1 verschiedenen Werthe $1-\varepsilon$ und $1+\varepsilon$ geradezu 1 selbst zu setzen. Dies ist nun zwar dann erlaubt, wenn diese Reihen noch für $\varrho = 1$ convergent sind, weil eine nach Potenzen von ϱ fortschreitende Reihe, wenn sie bis $\varrho = c$ inclusive convergent ist, bekanntlich auch bis $\varrho = c$ inclusive stetig bleibt; aber der Beweis für die Convergenz der Reihen, so leicht er sich für $\varrho < 1$ resp. > 1 durch Betrachtungen, wie man sie aus der Theorie des Potentials kennt, führen lässt, so ist er doch für $\varrho = 1$ mit grossen Schwierigkeiten verknüpft; ja es findet eine solche Convergenz nicht einmal durchweg statt, sondern die Reihen

werden in gewissen Ausnahmefällen in der That divergent. Man kann also nur behaupten, dass die Reihen ($I^{a.}$) und ($I^{b.}$), wenn sie convergent sind, im Allgemeinen (d. h. ausser für die Grenzwerthe der Variablen und für die vieldeutigen Stellen der Function) $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ zur Summe haben; um aber die Bedingungen der Convergenz festzustellen, wird man von den Reihen (3′) etc. gänzlich abstrahiren und sich nach anderen Hülfsmitteln umsehen müssen. Es liegt nahe hierzu die Methoden zu benutzen, durch welche Dirichlet zuerst die Allgemeingültigkeit der Fourierschen und Laplaceschen Reihen bewies, und ich werde dies im nächsten Paragraphen wenigstens für die Functionen dritter Ordnung durchführen. Zuvor will ich aber noch zwei allgemeine Sätze anführen, die hier nicht füglich übergangen werden können.

Bezeichnen Z_m und Z_p zwei Laplacesche Functionen nter Ordnung, und ist m nicht $= p$, so kann man mit Hülfe der Differentialgleichung (5.) durch das bekannte, von Laplace herrührende, auf theilweise Integration gegründete Verfahren leicht beweisen, dass

$$(8.) \quad \int Z_m Z_p \sin^{n-1}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-1}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = 0.$$

Setzt man insbesondere $Z_p = R_p(\cos\omega)$ und vertauscht noch die φ mit den λ, wodurch Z_m in Z'_m übergeht, $R_p(\cos\omega)$ ungeändert bleibt, so wird

$$\int Z'_m R_p(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

Wenn also in (I.) die zu entwickelnde Function k selbst eine Laplacesche Function Z_m ist, so reducirt sich die Reihe auf ein einziges Glied und giebt das Resultat:

$$(9.) \quad \int Z'_m R_m(\cos\omega)\, d\sigma' = \frac{4\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}{(2m+n-1)\,\Gamma\frac{1}{2}(n-1)} Z_m.$$

Da übrigens auch die Reihen (3′.) und (3″.) hier nur aus Einem Gliede bestehen, also ihre Convergenz auch für $\varrho = 1$ selbstverständlich ist, so kann an der Gültigkeit dieses Resultates kein Zweifel bestehen. Dass auch die Grenzwerthe der Variablen hier keine Ausnahmefälle herbeiführen, geht schon daraus hervor, dass beide Seiten von (9.) als ganze algebraische Functionen von $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1 \cos\varphi_2$ u. s. w. bis zu jenen Grenzwerthen inclusive stetig sind.

Durch die Sätze (8.) und (9.), auf welche schon in der Einleitung hingewiesen wurde, zeigt man auf bekannte Weise, dass eine Function von n Variablen, wenn sie für den ganzen Umfang der diesen Variablen zuertheilten Intervalle gegeben ist, sich nur auf Eine Art nach Laplaceschen Functionen nter Ordnung entwickeln lässt.

§ 4.

Summation der Reihenentwicklungen nach Functionen dritter Ordnung.

Die Reihe, deren Summe gefunden werden soll, wird aus ($I^{a.}$) durch die Annahme $\mu = 1$ erhalten; sie ist

$$(a.) \quad \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{m=\infty} \int f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{d \cos(m+1)\omega}{d(\cos\omega)}\, d\tau,$$

wenn

$$d\tau = \sin^2\lambda_1 \sin\lambda_2 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3,$$

$$\cos\omega = \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \sin\varphi_2 \sin\lambda_2 \cos(\varphi_3 - \lambda_3),$$

und wenn für λ_1 und λ_2 die Integrationsgrenzen 0 und π, für λ_3 aber 0 und 2π genommen werden. Die Summe der m ersten Glieder der Reihe möge S_m heissen, so lässt sich wegen der bekannten Formel

$$\cos\omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega + \ldots + \cos m\omega = \frac{1}{2} \frac{\sin(m + 1/2)\omega}{\sin 1/2\omega} - \frac{1}{2}$$

S_m durch ein einziges Integral

$$\text{(b.)} \quad S_m = -\frac{1}{4\pi^2} \int f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\sin(m + 1/2)\omega}{\sin 1/2\omega} \right) \frac{d\tau}{\sin\omega}$$

darstellen, und es ist der Grenzwerth dieses Integrals für $m = \infty$ aufzusuchen. Zu diesem Zwecke transformire man dasselbe vermittelst der Substitution (6.), welche jetzt vollständig so lautet:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi_1 \, b_1 - \sin\varphi_1 \, b_2 \\
a_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \, b_1 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \, b_2 - \sin\varphi_2 \, b_3 \\
a_3 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \, b_1 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \, b_2 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \, b_3 - \sin\varphi_3 \, b_4 \\
a_4 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \, b_1 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \, b_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 \, b_3 + \cos\varphi_3 \, b_4,
\end{aligned}$$

während für die a und b (wenn man das oben vorübergehend eingeführte $l = 1$ setzt) die folgenden Ausdrücke gelten:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\lambda_1 & b_1 &= \cos\omega \\
a_2 &= \sin\lambda_1 \cos\lambda_2 & b_2 &= \sin\omega \cos\omega_1 \\
a_3 &= \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 & b_3 &= \sin\omega \sin\omega_1 \cos\omega_2 \\
a_4 &= \sin\lambda_2 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 & b_4 &= \sin\omega \sin\omega_1 \sin\omega_2.
\end{aligned}$$

Hierdurch nimmt S_m die Form an:

$$\text{(c.)} \quad S_m = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\sin(m + 1/2)\omega}{\sin 1/2\omega} \right) F(\omega) \sin\omega \, d\omega,$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$\text{(d.)} \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\omega_2 \int_0^\pi f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \sin\omega_1 \, d\omega_1 = F(\omega).$$

Die Function $F(\omega)$ ist jedenfalls für keinen Werth von ω unendlich, weil wir die Function f als endlich voraussetzen. Nimmt man ausserdem zunächst an, dass $F(\omega)$ von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ auch continuirlich sei, so kann man theilweise integriren und erhält, weil $F(\omega) \sin\omega$ an den Grenzen verschwindet

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m + 1/2)\omega}{\sin 1/2\omega} \frac{d}{d\omega} [F(\omega) \sin\omega] \, d\omega.$$

Der Werth dieses Integrales ist aber für $m = \infty$ nach einem bekannten Satze von Dirichlet:

$$= \left[\frac{d}{d\,\omega}\left(F(\omega)\sin\omega\right)\right]_{(\omega = 0)} = F(+0) + \left(F'(\omega)\sin\omega\right)_{(\omega = 0)}.$$

Hat nun $F(+0)$, die Grenze von $F(\omega)$ für ein unendlich abnehmendes ω, einen bestimmten Werth, ist also für ein unendlich kleines ω die Differenz $F(\omega + 0) - F(+0)$ verschwindend klein, so verschwindet, wie leicht einzusehen, auch der Ausdruck $F'(\omega)\sin\omega$ für $\omega = 0$, und es bleibt:

$$S_\infty = F(+0).$$

Man hat also den folgenden Satz:

> Besitzt $F(+0)$ einen bestimmten Werth und ist $F(\omega)$ zwischen den Grenzen 0 und π continuirlich, so ist die Reihe (a.) convergent und hat $F(+0)$ zur Summe.

Ist aber $F(\omega)$ für einen Werth $\omega = \eta$ discontinuirlich, so muss man in (c.) das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0 und η, η und π zerlegen und findet:

$$S_\infty = F(+0) + \frac{\sin\eta}{\pi}\,\frac{\sin(m + 1/2)\,\eta}{\sin 1/2\,\eta}\left[F(\eta + 0) - F(\eta - 0)\right].$$

Da nun die eingeklammerte Grösse der Annahme nach von Null verschieden, der davorstehende Factor aber für $m = \infty$ unbestimmt ist, so hat auch die Reihe (a.) in diesem Falle keine bestimmte Summe. — Dasselbe findet natürlich statt, wenn $F(\omega)$ mehrere unstetige Stellen besitzt. Unsere Aufgabe ist hiernach eine doppelte; wir haben die Stetigkeit von $F(\omega)$ zu untersuchen und den Werth dieser Function für ein unendlich abnehmendes ω zu bestimmen.

Es wurde $F(\omega)$ durch das Doppelintegral (d.) definirt, dessen Werth von der Beschaffenheit der gegebenen Function $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ abhängt. Wir setzen natürlich voraus, dass diese Function in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht durchweg, sondern nur stellenweise discontinuirlich werde; dann besitzt f, weil die λ, bis auf einige später zu berührende Ausnahmestellen, sich stetig mit den ω ändern, dieselbe Eigenschaft im Allgemeinen auch in Bezug auf ω, ω_1, ω_2. Die Unstetigkeiten von f können nun von dreierlei Art sein; sie finden entweder für Werthe statt, die einer, oder für solche, die gleichzeitig zwei Bedingungsgleichungen zwischen ω, ω_1, ω_2 genügen, oder endlich für singuläre Werthsysteme dieser Grössen. Eine Discontinuität der ersten Art tritt z. B. ein, wenn $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ für einen von ω_1 und ω_2 unabhängigen Werth $\omega = h$ discontinuirlich wird, d. h. für $\omega = h - 0$ und $\omega = h + 0$, bei beliebigen Werthen von ω_1 und ω_2, zwei um eine endliche Differenz verschiedene Functionen $f_1(h, \omega_1, \omega_2)$ und $f_2(h, \omega_1, \omega_2)$ darstellt. In diesem Falle erleidet offenbar auch $F(\omega)$ für $\omega = h$ im Allgemeinen eine Stetigkeitsunterbrechung; wenigstens könnte nur die besondere Beschaffenheit von f_1 und f_2 eine solche zufällig hindern. In allen anderen Fällen aber, d. h. wenn f nur für solche Werthe von ω unstetig wird, die von ω_1 und ω_2 nicht unabhängig sind, kann man die unstetigen Stellen bei der Berechnung des Doppelintegrales in beliebig enge Grenzen einschliessen und dadurch dieses Integral als die Summe

eines verschwindend kleinen und eines nach ω stetigen Theiles darstellen; es bleibt also dann F (ω) trotz der Discontinuitäten von f stetig. Um dieses deutlicher zu erkennen, wollen wir statt f $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ lieber g $(\omega, \omega_1, \omega_2)$, also

$$F(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\omega, \omega_1, \omega_2) \sin \omega_1 \, d\omega_1 \, d\omega_2$$

setzen, unter ω uns den Radius einer Kugel, unter ω_1 den Winkel, den ein nach einem beliebigen Punkte ihrer Oberfläche gezogener Radius mit einem festen Radius einschliesst, und unter ω_2 den Winkel vorstellen, den die Ebene beider Radien mit einer durch den letzteren gelegten festen Ebene bildet. Den innern Raum einer Kugel vom Halbmesser π denken wir uns mit Materie erfüllt, deren Dichtigkeit in irgend einem Punkte mit den Polarcoordinaten ω, ω_1, ω_2 gleich g $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ ist; dann ist F (ω) der mittlere Werth dieser Dichtigkeit auf der Oberfläche der Kugel (ω). Die Function g kann nun unstetig oder vieldeutig werden für gewisse Flächen, Linien und Punkte. Betrachten wir nun zwei unendlich nahe Kugelflächen (ω) und $(\omega + \varepsilon)$, so werden diese die Unstetigkeitsflächen in einander unendlich nahe liegenden Curven schneiden. Schliesst man nun jede solche Unstetigkeitslinie auf der einen Kugel zwischen zwei unendlich nahe (um δ von einander abstehende) Curven ein und projicirt die letzteren durch Strahlen vom Kugelmittelpuncte aus auf die andere Kugel, so werden diese Projectionen (bei passender Wahl von δ im Verhältniss zu ε) die entsprechende Unstetigkeitslinie ebenfalls einschliessen; ähnlich verfährt man für einzelne Unstetigkeitspunkte oder für solche Unstetigkeitslinien, die nur auf der einen Kugel vorkommen, ohne auf der andern eine entsprechende zu haben. Auf diese Weise wird jedes der Integrale für F $(\omega + \varepsilon)$ und F (ω) in zwei Theile mit bezüglich gleichen Integrationsgrenzen zerlegt, und die Differenz F $(\omega + \varepsilon)$ — F (ω) wird durch die Summe zweier Integrale ausgedrückt, von denen das erste, die unendlich schmalen Kugelstreifen umfassende, verschwindend klein ist, (sofern nicht etwa, wovon wir gänzlich abstrahiren, die Unstetigkeitslinien in Folge unendlich vieler Windungen eine unendliche Länge haben), das zweite aber deswegen sich der Null nähert, weil in ihm die Function unter dem Integralzeichen, nämlich g $(\omega + \varepsilon)$ — g (ω), für den ganzen Umfang der Integration verschwindend klein ist. Es ist also F (ω) in der That eine stetige Function von ω; der Fall allein bildet eine Ausnahme, dass die Kugelfläche (ω) selbst oder auch nur ein endliches Stück derselben eine Unstetigkeitsfläche ist, also g $(\omega + \varepsilon)$ und g (ω) zwei total verschiedene Functionen von ω_1 und ω_2 darstellen. Nun hängt die mit g identische Function f unmittelbar von den λ und erst vermöge (6. S. 15.) von den ω und gleichzeitig von den φ ab. Wenn also für ein besonderes Werthsystem $(\varphi_1 = \alpha_1, \varphi_2 = \alpha_2, \varphi_3 = \alpha_3)$ die Function f eine Discontinuität von der Form ω = Const. besitzt, d. h. unstetig ist für solche Werthe von λ_1, λ_2, λ_3, für welche

$$\cos \alpha_1 \cos \lambda_1 + \sin \alpha_1 \sin \lambda_1 \cos \alpha_2 \cos \lambda_2 + \ldots = \text{Const.},$$

so enthält diese Bedingungsgleichung, sobald man für $\cos \lambda_1$, $\sin \lambda_1 \cos \lambda_2$, etc. ihre Werthe aus (6. S. 15.) einsetzt, so lange φ_1, φ_2, φ_3 allgemein bleiben, ausser ω auch ω_1 und ω_2, ist also nicht mehr von der Form ω = Const. Ein etwas genaueres Eingehen würde zeigen, dass wenn das Werthsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gleichsam das Centrum einer

Discontinuität bildet, diese nur noch für das Werthsystem $(\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2, \pm \pi + \alpha_3)$ von der Form $\omega = \text{Const.}$ bleibt, sofern $\sin \alpha_1$ und $\sin \alpha_2$ von Null verschieden sind. Ist aber $\alpha_1 = 0$ oder π, so bleibt die Discontinuität für alle möglichen Werthe von φ_2 und φ_3 bestehen, und ist $\alpha_2 = 0$ oder π, so findet sie für alle möglichen Werthe von φ_3 statt.

Es war in der bisherigen Erörterung nur der Einfluss ausser Acht gelassen worden, den eine etwaige sprungweise Aenderung der λ bei stetig variirendem ω ausüben könnte. Nun ist nach (6. S. 15.) leicht einzusehen, dass λ_1 sich durchweg continuirlich mit ω ändert, und dass dasselbe für λ_2 gilt, sofern λ_1 nicht einen der Werthe 0 und π besitzt. Es ist überflüssig, das Verhalten von λ_2 für diesen Fall näher zu prüfen; es genügt zu bemerken, dass $\sin \lambda_1$ nur 0 werden kann, wenn gleichzeitig $\cos \omega_1 = \pm 1$ und $\cos (\varphi_1 \pm \omega) = \mp 1$, also nur für singuläre Punkte auf einer der vorhin betrachteten Kugeln. Ebenso erweist sich eine Discontinuität von λ_3, welche durch das Verschwinden von $\sin \lambda_2$ bedingt ist, weil sie nur für den Werth $\sin \omega_2 = 0$ stattfinden kann, als ohne Einfluss auf die Stetigkeit von $F(\omega)$. Sind aber λ_1 und λ_2 von 0 und π verschieden, so sind $\cos \lambda_3$ und $\sin \lambda_3$ endliche und stetige Functionen von ω, und es ändert sich also auch λ_3 selbst sicher continuirlich, sofern sich nicht der Fall ereignet, dass es von dem Grenzwerthe 0 auf 2π, oder von 2π auf 0 überspringt. Aber für $\lambda_3 = 0$ oder $\lambda_3 = 2\pi$ ist

$$\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \omega + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \omega \cos \omega_1$$
$$+ \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \omega \sin \omega_1 \cos \omega_2 + \cos \varphi_3 \sin \omega \sin \omega_1 \sin \omega_2 = 0,$$

und diese Bedingungsgleichung ist nur dann von ω_1 und ω_2 unabhängig, wenn gleichzeitig

$$\varphi_1 = {}^1/_2\, \pi, \quad \varphi_2 = {}^1/_2\, \pi, \quad \varphi_3 = {}^1/_2\, \pi \text{ oder } = {}^3/_2\, \pi,$$

in welchem Falle sie sich auf

$$\cos \omega = 0 \text{ oder } \omega = {}^1/_2\, \pi$$

reducirt. Für diese besondern Werthe der φ hängen die λ von den ω durch die Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} \cos \lambda_1 &= - \sin \omega \cos \omega_1 \\ \sin \lambda_1 \cos \lambda_2 &= - \sin \omega \sin \omega_1 \cos \omega_2 \\ \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \cos \lambda_3 &= \mp \sin \omega \sin \omega_1 \sin \omega_2 \\ \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 &= \pm \cos \omega, \end{aligned}$$

woraus, wenn wir nur die dem Werthe $\varphi_3 = {}^1/_2\, \pi$ entsprechenden oberen Zeichen beachten, sofern $\pi < \omega_2 < 2\pi$, folgt

$$\text{für } \omega = {}^1/_2\, \pi - 0 : \lambda_1 = \pi - \omega_1, \; \lambda_2 = \omega_2 - \pi, \; \lambda_3 = 0;$$
$$\text{für } \omega = {}^1/_2\, \pi + 0 : \lambda_1 = \pi - \omega_1, \; \lambda_2 = \omega_2 - \pi, \; \lambda_3 = 2\pi;$$

es geht also, wenn ω, indem es zunimmt, den Werth ${}^1/_2\, \pi$ überschreitet, λ_3 plötzlich von 0 auf 2π über für alle möglichen Werthe von ω_1 und für alle zwischen π und 2π gelegenen von ω_2; dagegen wird für $0 < \omega_2 < \pi$ die Variable $\lambda_3 = \pi$ und ändert sich continuirlich. Man erhält also, wenn auch die Function f für $\lambda_3 = \pi$ continuirlich ist, indem man die Integration nach ω_2 auf das Intervall von π bis 2π beschränkt und

die Integrationsvariablen ω_1 und ω_2 vermöge der obigen Gleichungen durch $\pi - \lambda_1$ und $\pi + \lambda_2$ ersetzt:

$$F(\tfrac{1}{2}\pi - 0) - F(\tfrac{1}{2}\pi + 0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\Big[f(\lambda_1, \lambda_2, 0) - f(\lambda_1, \lambda_2, 2\pi)\Big]\sin\lambda_1\, d\lambda_1\, d\lambda_2.$$

Die Function F (ω) erleidet also, wenn jede der Grössen φ_1, φ_2, φ_3 den Werth $\tfrac{1}{2}\pi$ besitzt, für $\omega = \tfrac{1}{2}\pi$ im Allgemeinen eine plötzliche Aenderung. Für $\varphi_3 = \tfrac{3}{2}\pi$ wäre in der vorigen Formel das Vorzeichen der linken Seite in das entgegengesetzte zu verwandeln.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so hat sich ergeben, dass F (ω) eine stetige Function von ω ist ausser für solche speciellen Werthsysteme von φ_1, φ_2, φ_3, welche die Function f $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ discontinuirlich machen für einen bestimmten Werth von ω bei beliebigen Werthen von ω_1 und ω_2. Es stimmt daher nach dem Früheren der Werth der unendlichen Reihe (a.) bis auf die eben angegebenen Ausnahmefälle mit F $(+0)$ überein, und es ist jetzt nur noch dieser letztere Werth zu ermitteln. Sind nun

1) φ_1, φ_2, φ_3 von ihren Grenzwerthen verschieden, so nehmen für $\omega = 0$ die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 die constanten Werthe φ_1, φ_2, φ_3 an, und sie unterscheiden sich von denselben nur um unendlich kleine Grössen, wenn ω unendlich klein ist. Unterscheiden sich nun auch die Functionen f $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und f $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ für ein unendlich kleines ω unendlich wenig, d. h. ist die letztere in der Umgebung des Werthsystems $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ stetig und eindeutig, so hat man:

$$F(+0) = \frac{1}{4\pi} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\int_0^{2\pi} d\omega_2 \int_0^{\pi} \sin\omega_1,\ d\omega_1,$$

das heisst:

$$S_\infty = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Die Reihe (a.) hat also dann den Werth f $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ zur Summe. Ist aber dieser Werth vieldeutig, so muss man ω gleich einer unendlich kleinen Grösse ε setzen, wodurch

$$\lambda_1 = \varphi_1 + \delta_1,\ \lambda_2 = \varphi_2 + \delta_2,\ \lambda_3 = \varphi_3 + \delta_3,$$

also

$$a_1 = \cos(\varphi_1 + \delta_1),\ a_2 = \sin(\varphi_1 + \delta_1)\cos(\varphi_2 + \delta_2) \text{ etc.}$$

wird. Vernachlässigt man die unendlich kleinen Grössen zweiter und höherer Ordnung, so wird:

$$a_1 = \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\ \delta_1$$

$$a_2 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\ \delta_1 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\ \delta_2,$$

etc.

und vergleicht man diese Ausdrücke mit (6. S. 15.), nachdem man darin $\cos\omega = 1$, $\sin\omega = \varepsilon$ gesetzt hat, so findet man, dass:

$$\delta_1 = \varepsilon\cos\omega_1,\ \delta_2 = \varepsilon\,\frac{\sin\omega_1\cos\omega_2}{\sin\varphi_1},\ \delta_3 = \varepsilon\,\frac{\sin\omega_1\sin\omega_2}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}.$$

Man erhält also für diesen Fall:

$$S_\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\omega_2 \int_0^{\pi} d\omega_1 \sin\omega_1 \, f(\varphi_1 + \delta_1, \varphi_2 + \delta_2, \varphi_3 + \delta_3),$$

wenn man unter δ_1, δ_2, δ_3 die eben gefundenen unendlich kleinen Werthe substituirt.

Um hierfür ein Beispiel zu geben, wollen wir für f die Function

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{(\varphi_1 - \alpha_1)^2}{(\varphi_1 - \alpha_1)^2 + \sin^2\alpha_1 \, (\varphi_2 - \alpha_2)^2 + \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \, (\varphi_3 - \alpha_3)^2},$$

wählen, so wird:

$$f(\alpha_1 + \delta_1, \alpha_2 + \delta_2, \alpha_3 + \delta_3) = \cos^2\omega_1,$$

und die Reihe nimmt für die speciellen Werthe $\varphi_1 = \alpha_1$, $\varphi_2 = \alpha_2$, $\varphi_3 = \alpha_3$ den bestimmten Werth

$$S_\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\omega_2 \int_0^{\pi} d\omega_1 \sin\omega_1 \cos^2\omega_1 = \frac{1}{3}$$

an, wiewohl der Functionalwerth $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vieldeutig ist.

2) Ist $\varphi_3 = 0$ oder $= 2\pi$, während φ_1 und φ_2 von 0 und π verschieden sind, so ist für $\omega = 0$ noch $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_2$; aber λ_3 kann sowohl $= 0$ als auch $= 2\pi$ sein. Nun ist in diesem besonderen Falle

$$a_4 = b_4 \text{ d. h. } \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 = \sin\omega \sin\omega_1 \sin\omega_2,$$

woraus man, weil die übrigen Sinus positiv sind, entnimmt, dass $\sin\lambda_3$ und $\sin\omega_2$ einerlei Zeichen haben. Man muss also für $\omega = \varepsilon$, mag nun $\varphi_3 = 0$ oder $= 2\pi$ sein, setzen:

$$\lambda_3 = \varepsilon \frac{\sin\omega_1 \sin\omega_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2} = \delta_3, \text{ wenn } 0 < \omega_2 < \pi,$$

$$\lambda_3 = 2\pi + \varepsilon \frac{\sin\omega_1 \sin\omega_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2} = 2\pi + \delta_3, \text{ wenn } \pi < \omega_2 < 2\pi,$$

und dem gemäss das Integral nach ω_2 in zwei andere mit den Grenzen 0 und π, π und 2π zerlegen. Es erhält also die Reihe für $\varphi_3 = 0$ und $\varphi_3 = 2\pi$ einen und denselben Werth, und dieser ist, wenn es erlaubt ist, ε geradezu $= 0$ zu setzen:

$$S_\infty = \frac{1}{2}\Big[f(\varphi_1, \varphi_2, 0) + f(\varphi_1, \varphi_2, 2\pi)\Big],$$

und im entgegengesetzten Falle nimmt er, wenn man in dem zweiten Theilintegrale $\omega_2 + \pi$ statt ω_2 schreibt, die Form an:

$$S_\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\omega_2 \int_0^{\pi} d\omega_1 \sin\omega_1 \Big[f(\varphi_1 + \delta_1, \varphi_2 + \delta_2, \delta_3) + f(\varphi_1 + \delta_1, \varphi_2 + \delta_2, 2\pi - \delta_3)\Big]$$

3) Wenn $\varphi_2 = 0$, aber φ_1 von 0 und π verschieden, so kann man statt (6. S. 15.) eine einfachere Substitution anwenden, welche aus jener erhalten wird, indem man auch

$\varphi_3 = 0$ setzt; es wird dann $\lambda_3 = \omega_2$ und man findet, wenn man die Werthe von λ_1 und λ_2 für $\omega = \varepsilon$ durch $\varphi_1 + \delta_1$ und δ_2' bezeichnet und die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \cos\lambda_1 &= \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\ \delta_1 = \cos\varphi_1 - \varepsilon\sin\varphi_1\cos\omega_1 \\ \sin\lambda_1\cos\lambda_2 &= \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\ \delta_1 = \sin\varphi_1 + \varepsilon\cos\varphi_1\cos\omega_1 \\ \sin\lambda_1\sin\lambda_2 &= \sin\varphi_1\ \delta_2' = \varepsilon\sin\omega_1, \end{aligned}$$

also:

$$\delta_1 = \varepsilon\cos\omega_1,\quad \delta_2' = \varepsilon\frac{\sin\omega_1}{\sin\varphi_1}.$$

Es ist hiernach für $\varphi_2 = 0$:

$$S_\infty = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\omega_1 \sin\omega_1\ f(\varphi_1 + \delta_1, \delta_2', \lambda_3),$$

und wenn es erlaubt ist ε geradezu $= 0$ zu setzen:

$$S_\infty = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1, 0, \lambda_3)\, d\lambda_3.$$

Die Summe der Reihe ist also für $\varphi_2 = 0$ von φ_3 unabhängig.

3') Ebenso ist für $\varphi_2 = \pi$, wenn φ_1 weder 0 noch π:

$$S_\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\omega_1 \sin\omega_1\ f(\varphi_1 + \delta_1, \pi - \delta_2', \lambda_3),$$

oder:

$$S_\infty = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \pi, \lambda_3)\, d\lambda_3.$$

4) Ist $\varphi_1 = 0$, so kann man $\omega = \lambda_1$, $\omega_1 = \lambda_2$, $\omega_2 = \lambda_3$ nehmen und erhält für alle Werthe von φ_2 und φ_3:

$$S_\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} f(\varepsilon, \lambda_2, \lambda_3) \sin\lambda_2\, d\lambda_2 \quad (\text{für } \varepsilon = 0)$$

und ist endlich $\varphi_1 = \pi$, so wird:

$$S_\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} f(\pi - \varepsilon, \lambda_2, \lambda_3) \sin\lambda_2\, d\lambda_2.$$

Ein Rückblick auf die erhaltenen Resultate zeigt, dass die Reihe (a.) zwar im Allgemeinen eine willkührlich gegebene Function von drei Variablen in derselben Weise darzustellen geeignet ist, wie die Laplaceschen und Fourierschen Reihen Functionen von zwei oder Einer Variablen, dass sie aber für specielle Werthsysteme $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, selbst wenn die Function in der unmittelbaren Nähe derselben stetig ist, divergent werden kann. Es tritt dieser Fall dann ein, wenn $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ für alle Werthe der λ, die in constanter Entfernung (ω) von $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ liegen, discontinuirlich ist, und es

zeigte sich im Besonderen, dass der Function f diese Eigenschaft für die Werthe $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_3 = \frac{1}{2}\pi$ oder $= \frac{3}{2}\pi$ zukommt. Betrachten wir noch, um ein anderes einfaches Beispiel zu haben, den Fall, dass f sich auf eine von λ_2 und λ_3 unabhängige Function f (λ_1) reducirt, so erhalten wir aus (a), indem wir $\varphi_2 = 0$ setzen und die Integrationen nach λ_3 und λ_2 ausführen, die mit der Fourierschen Sinusreihe im Wesentlichen identische Reihe

$$\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\sin(m+1)\varphi_1}{\sin\varphi_1}\int_0^\pi f(\lambda_1)\sin(m+1)\lambda_1\sin\lambda_1\,d\lambda_1,$$

und erkennen, dass sie zwar für zwischen den Grenzen 0 und π gelegene Werthe von φ_1 den Werth f (φ_1), resp. das arithmetische Mittel aus f $(\varphi_1 + 0)$ und f $(\varphi_1 - 0)$, zur Summe hat, dass aber die zu den Grenzwerthen $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_1 = \pi$ selbst gehörigen Reihen

$$\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} m\int_0^\pi f(\lambda_1)\sin m\lambda_1\sin\lambda_1\,d\lambda_1 \text{ und } \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1} m\int_0^\pi f(\lambda_1)\sin m\lambda_1\sin\lambda_1\,d\lambda_1$$

nur dann die Werthe f (0) und f (π) darstellen, wenn f (λ_1) in dem ganzen Intervalle von $\lambda_1 = 0$ bis $\lambda_1 = \pi$ stetig ist, und im entgegengesetzten Falle divergent sind.

F. G. Mehler.